

Übungsblatt Nr. 6 zur Vorlesung Quantenmechanik II

18 Datta-Das Transistor

Ein Teilchen mit Spin-1/2 in einem Elektronen-Gas mit RASHBA-Spin-Bahn-Kopplung wird beschrieben durch den Hamilton-Operator $H = \vec{p}^2/2m + \alpha_R[\vec{\sigma} \times \vec{p}]_z$, mit der Kopplungsstärke α_R . In einem 2-dimensionalen Elektronengas in der x-y-Ebene reduziert sich das zu,

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \alpha_R [\sigma_x p_y - \sigma_y p_x]. \quad (1)$$

- a) Wir garantieren das die Elektronen keinen Impuls haben in y-Richtung und das alle Impulse in x-Richtung positiv sind. Zeigen sie nun das es für jede Eigenenergie zwei entartete Eigenzustände gibt. Konstruieren sie dann einen Eigenzustand mit Energie E , für den bei $x = 0$ gilt, $\langle \sigma_x \rangle = 1$. An der Stelle $x = L$ wird eine Messung mit dem Operator σ_x durchgeführt. Welche Eigenwerte ergeben sich mit welcher Wahrscheinlichkeit? Zeigen sie das diese Wahrscheinlichkeiten nur von L , m und α_R abhängen.

Anmerkung: Wenn nun ein Strom durch dieses Elektronengas fließt, wobei die Elektronen in einem bestimmten Spin-Zustand initialisiert sind, ist es durch Variation von α_R möglich den Strom zu unterdrücken.

- b) Lassen sie nun auch einen Impuls in y-Richtung zu. Finden sie die Eigenzustände und Eigenenergien von H . Zeigen sie, dass für einen Eigenzustand mit $\langle \sigma_x \rangle = 1$ bei $x = 0$, im Limes $p_y \gg p_x$ auch an der Stelle $x = L$ gilt $\langle \sigma_x \rangle = 1$.

19 Spin-Bahn-Wechselwirkung

Berechnen sie für den Hamilton-Operator der Spin-Bahn-Wechselwirkung

$$H_{SB} = \lambda(\vec{L} \cdot \vec{S}), \quad (2)$$

die folgenden Kommutatoren: $[H_{SB}, \vec{L}]$, $[H_{SB}, \vec{S}]$, $[H_{SB}, \vec{L}^2]$, $[H_{SB}, \vec{S}^2]$, $[H_{SB}, \vec{J}]$ und $[H_{SB}, \vec{J}^2]$ ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$).

Bitte wenden ...

20 Dephasing

Ein 2-Niveau-System (Spin-1/2) wird beschrieben durch den Hamilton-Operator,

$$H = \frac{\hbar}{2}(\omega_0 + X)\sigma_z. \quad (3)$$

X ist dabei eine Gaußverteilte Größe mit der Verteilungsfunktion $P(X) = \exp[-(X/W)^2] / \sqrt{\pi}W$. Diese Größe variiert so langsam, dass wir davon ausgehen können, dass sie für jede einzelne Zeitentwicklung konstant ist, und sich nur von Experiment zu Experiment ändert. Gehen sie davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ das System präpariert ist im Zustand $(|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ und berechnen sie $\langle \sigma_x(t) \rangle$ für einen Konstanten Wert von X . Mitteln sie dann über X . Dies entspricht der Mittelung über mehrere Experimente.

21 Quanten-Fehler-Korrektur

Alice hat einen 2-Niveau System (Spin-1/2) präpariert in dem Zustand,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|-\rangle + \beta|+\rangle). \quad (4)$$

mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Sie übergibt diesen Zustand an Bob. Bei dieser Übergabe kann ein Fehler stattfinden. Für diese Aufgabe ist der einzige Fehler, den wir erlauben, der sogenannte Bit-Flip. Bei diesem Fehler findet im Unterraum eines einzelnen Spins die Unitäre Transformation $|+\rangle \rightarrow |-\rangle$, $|-\rangle \rightarrow |+\rangle$ statt. Dies lässt sich auch darstellen durch den Operator σ_x .

- a) Um nun Bob die Möglichkeit zu geben herauszufinden, ob ein solcher Fehler stattgefunden hat, kodiert Alice ihren Zustand nicht in ein Bit/Spin-1/2 Teilchen, sondern in drei,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|---\rangle + \beta|+++ \rangle). \quad (5)$$

Bei der Übergabe des Zustandes von Alice an Bob kann ein Bit-Flip Fehler auftreten. In dieser Aufgabe erlauben wir das allerdings bloß für einen der drei Spins. Der Zustand kann selbstverständlich auch ohne Fehler ankommen. Zeigen sie, dass unabhängig davon, welcher dieser Fehler auftritt, der Zustand, den Bob hat, ein Eigenzustand zum Operator $\sigma_{z1}\sigma_{z2}$ ($\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \mathbf{1}$) und $\sigma_{z1}\sigma_{z3}$ ($\sigma_z \otimes \mathbf{1} \otimes \sigma_z$) ist.

- b) Bob misst nun $\sigma_{z1}\sigma_{z2}$ und $\sigma_{z1}\sigma_{z3}$. Wir kann er dadurch feststellen, ob ein Fehler aufgetreten ist?