KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler

WS 11/12

22.11.11

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_415.php

Übungsblatt Nr. 5 zur Vorlesung Quantenmechanik II

14 Gekoppelte Spins

Finden sie die Eigenwerte und Eigenzustände von zwei gekoppelten Spin-1/2 Teilchen, die durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben werden,

$$H = \frac{J}{\hbar^2}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \,. \tag{1}$$

15 Quanten-i-SWAP

Betrachten Sie zwei wechselwirkende Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen ($i = 1, 2$) mit folgendem Hamilton-Operator

$$H = -\frac{J}{\hbar^2}\left(S_{+,1}S_{-,2} + S_{-,1}S_{+,2}\right), \tag{2}$$

wobei $S_{\pm,j} = S_{x,j} \pm iS_{y,j}$ mit $j = \{1, 2\}$.

a) Schreiben Sie den Hamilton-Operator als 4x4 Matrix in den vier Basiszuständen $|+,+\rangle$, $|+,-\rangle$, $|-,+\rangle$, und $|-,-\rangle$, die die gemeinsamen Eigenzustände von $S_{z,1}$ und $S_{z,2}$ bezeichnen.

b) Wir wollen nun den Hamilton-Operator H ein Zeitintervall τ auf einen beliebigen Zustand der beiden Spins wirken lassen und die Zeitentwicklung dieses Zustands betrachten. Bestimmen Sie die 4x4 Zeitenwicklungs-Matrix $U = e^{-iH\tau/\hbar}$ als Funktion des Parameters $\gamma = J\tau/\hbar$. Zeigen Sie dann, dass die Zeitentwicklung, die dem Wert $\gamma = \pi/2$ entspricht, bis auf einen Vorfaktoren i zum Vertauschen der beiden Spins führt (sogn. i-SWAP-Quantenoperation).

16 Rotationsinvarianz des Singulett-Zustands

Betrachten Sie zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen ($i = 1, 2$), die sich in einem Spin-Singulett-Zustand

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,-\rangle - |-,+\rangle\right) \tag{3}$$

bezüglich der z-Achse befinden. Zeigen Sie, dass der Spin-Singulett-Zustand rotationsinvariant bezüglich der Wahl der gemeinsamen Quantisierungsachse der beiden Spins ist. Projezieren Sie dazu den Singulett-Zustand auf eine rotierte Quantisierungsachse, durch die unitäre Transformation $U \otimes U$, mit $U = e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$, $|\vec{n}|^2 = 1$.

Bitte wenden ...

17 BELLsche Ungleichung

Wir betrachten eine Quelle, die paarweise zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in einem Spin-Singulett-Zustand $|S\rangle$ aussendet. Diese sollen in entgegengesetzte Richtungen davonfliegen und zwei Detektoren weit entfernt von der Quelle passieren. Detektor 1 misst den Spin von Teilchen 1 bezüglich der Quantisierungsachse $\vec{a}$ (Messoperator $\vec{a}\vec{\sigma}$), und Detektor 2 misst den Spin von Teilchen 2 bezüglich der Quantisierungsachse $\vec{b}$ (Messoperator $\vec{b}\vec{\sigma}$). Wir bezeichnen die entsprechenden Messwerte der Spins, durch $A_{\vec{a}}$ und $B_{\vec{b}}$. Beide können also nur die Werte 1 oder -1 annehmen.

a) Berechnen Sie die kombinierte Wahrscheinlichkeit $P^{|S\rangle}(A_{\vec{a}}, B_{\vec{b}})$, der Messung von $A_{\vec{a}}$ und $B_{\vec{b}}$, wenn die Teilchen sich vor der Messung im Spin-Singulett-Zustand befinden. Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeit nicht von der Reihenfolge der Messung abhängt.

b) Der Erwartungswert für $A_{\vec{a}}B_{\vec{b}}$ ist definiert als,

$$E^{|S\rangle}_{\vec{a}\cdot\vec{b}} = \langle S|(\vec{a}\vec{\sigma}) \otimes (\vec{b}\vec{\sigma})|S\rangle \,. \tag{4}$$

Wir nehmen nun an, dass Teilchen 1 bezgl. der Achse $\vec{a}$ oder $\vec{a}'$ und Teilchen 2 bezgl. $\vec{b}$ oder $\vec{b}'$ gemessen wird. Berechnen Sie die folgende Größe

$$C^{|S\rangle} = E^{|S\rangle}_{\vec{a}\vec{b}} - E^{|S\rangle}_{\vec{a}\vec{b}'} + E^{|S\rangle}_{\vec{a}'\vec{b}} + E^{|S\rangle}_{\vec{a}'\vec{b}'} \,, \tag{5}$$

und zeigen Sie, dass es Werte für die vier Richtungen gibt, für die gilt $|C^{|S\rangle}| > 2$.

Das äquivalente klassische bzw. lokale Model, muss hier nicht mehr durchgerechnet werden, es wird aber im folgenden beschrieben. Wir nehmen an, dass in der Quelle die Teilchen 1 und 2 mit verborgenen Parametern λ ausgestattet werden, die jedes mögliche spätere Messresultat bereits vorherbestimmen. Sei $A_{\vec{a}}(\lambda)$ das Messergebnis an Teilchen 1, gemessen entlang der Achse $\vec{a}$, und $B_{\vec{b}}(\lambda)$ das Messergebnis an Teilchen 2, gemessen entlang der Achse $\vec{b}$. Beide Messungen können nur die Werte 1 oder -1 annehmen. Speziell seien A unabhängig von $\vec{b}$, B unabhängig von $\vec{a}$, und λ unabhängig von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (Lokalitätsannahme). Es sei $\rho(\lambda)$ eine unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung der versteckten Variablen λ mit $\int \rho(\lambda)\, d\lambda = 1$. Der (klassische) gemeinsame Erwartungswert für eine Messung von A an 1 und B an 2 ist gegeben durch

$$E_{\vec{a}\vec{b}} = \int A_{\vec{a}}(\lambda) B_{\vec{b}}(\lambda) \rho(\lambda)\, d\lambda. \tag{6}$$

Die beiden Messungen werden weit genug voneinander durchgeführt, um die Lokalitätsannahme zu gewährleisten. Das werde dadurch erreicht, dass zur Messungen an 1 jeweils zufällig eine der beiden Achsen $\vec{a}$ und $\vec{a}'$ gewählt werde, und zur Messungen an 2 jeweils zufällig eine der beiden Achsen $\vec{b}$ und $\vec{b}'$. Die Wahl erfolge so kurz vor der Messung, dass keine Kommunikation zwischen den Detektoren oder zwischen Detektoren und Quelle möglich ist (Annahme einer maximalen Kommunikationsgeschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit). Es werden jeweils viele Messungen durchgeführt, um möglichst viele Werte λ "auszutesten". Daraus werden die vier Erwartungswerte $E_{\vec{a}\vec{b}}$, $E_{\vec{a}\vec{b}'}$, $E_{\vec{a}'\vec{b}}$ und $E_{\vec{a}'\vec{b}'}$ bestimmt. Jede Messung trägt zu einem der Erwartungswerte bei. Dann lässt sich zeigen das vollgende Ungleichung erfüllt ist,

$$-2 \leq E_{\vec{a}\vec{b}} - E_{\vec{a}\vec{b}'} + E_{\vec{a}'\vec{b}} + E_{\vec{a}'\vec{b}'} \leq 2. \tag{7}$$

Diese Ungleichung ist die BELLsche Ungleichung in der Form von CLAUSER, HORNE, SHIMONY und HOLT (CHSH-Ungleichung). Das Resultat in Aufgabe 17b) zeigt, dass ein quantenmechanischer Singulett-Zustand diese Ungleichungen verletzen kann.