Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler

WS 11/12

08.11.11

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_415.php

Übungsblatt Nr. 3 zur Vorlesung Quantenmechanik II

8 Näherungsmethoden

a) Gegeben sei der Hamilton-Operator von zwei Spins im Magnetfeld,

$$H_0 = -\omega\left(S_{z1} + S_{z2}\right) , \tag{1}$$

mit $\omega = \gamma B$. Benutzen sie entartete Störtheorie, um die Korrektur zu den Eigenenergien durch den Störterm $H_1 = \lambda S_{x1} S_{x2}$ in erster Ordnung zu berechnen.

b) Wir betrachten ein Teilchen in einem quartischen Potenzial ($\propto q^4$). In dimensionslosen Einheiten können wir den Hamilton-Operator wie folgt schreiben,

$$H = p^2 + q^4 \ , \ [q,p] = i \ . \tag{2}$$

Numerisch kann die dimensionslose Eigenenergie des Grundzustandes bestimmt werden, und man erhält $E_0 \approx 1.0603$. Benutzen sie eine Näherungsmethode ihrer Wahl, um ein analytisches Ergebnis zu finden, das um nicht mehr als 5% vom numerischen Resultat abweicht.

9 Wasserstoff-Atom im elektrischen Feld

Ein Wasserstoff-Atom in einem elektrischen Wechselfeld wird in guter Näherung durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben,

$$H = H_0 + H_1(t) \ , \ H_0 = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + V(\vec{r}) \ , \ H_1 = e\vec{r}\cdot\vec{E}\cos(\omega t) \, , \tag{3}$$

wobei e die Elementarladung ist. Die Eigenzustände von H_0 sind gegeben durch $|nlm\rangle$ mit den üblichen Quantenzahlen n, l und m.

a) Finden sie einen allgemeinen Ausdruck für die Übergangsrate zwischen den Zuständen des Wasserstoffatoms, ausgelöst durch die Störung $H_1(t)$ in niedrigster Ordnung (die bei $t = 0$ eingeschaltet wird). Überzeugen sie sich dazu, dass

$$\lim_{t\to\infty} \left| \frac{\sin(\omega_+ t/2)}{\omega_+/2} e^{\frac{i\omega_+ t}{2}} + \frac{\sin(\omega_- t/2)}{\omega_-/2} e^{\frac{i\omega_- t}{2}} \right|^2 = 2\pi t \left[\delta(\omega_+) + \delta(\omega_-)\right] \ . \tag{4}$$

b) Berechnen sie nun explizit die Übergangsrate für einen Übergang zwischen einem beliebigen Zustand $|3lm\rangle$ zum Grundzustand $|100\rangle$ (die Delta-Funktionen müssen dabei nicht ausgewertet werden).

10 Spin

a) Zeigen sie, dass

$$e^{i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbf{1}\cos a + i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\sin a, \tag{5}$$

mit $\vec{a} = a\vec{n}$, und $\vec{n}$ ist der Einheitsvektor.

b) Benutzen sie die explizite Form der Pauli-Matrizen und zeigen sie zuerst, dass gilt $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbf{1} + i\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k$, wobei ϵ_{ijk} der antisymmetrische Einheitstensor dritter Stufe ist. Benutzen sie dann diese Relation, um zu zeigen, dass

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\,\mathbf{1} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\, , \tag{6}$$

wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoroperatoren sind, die mit allen drei Pauli-Matrizen vertauschen.