

Übungen zu Physik der Quanteninformation WS 15/16

 Dr. M. Marthaler
C. Karlewski

 Blatt 7
Besprechung, 12.02.2016

2. Diagrammatik und höhere Ordnungen

20 Punkte

Wir betrachten ein 2-Zustandssystem gekoppelt an ein Bad aus harmonischer Oszillatoren (Spin-Boson-Modell). Der Hamiltonian ist gegeben als

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}\Delta E\sigma_z}_{H_S} + \underbrace{\sum_i \omega_i b_i^\dagger b_i}_{H_B} + g_c \cdot \underbrace{\sum_i (\sigma_+ b_i^- + \sigma_- b_i^+)}_{H_C}. \quad (1)$$

Hierbei ist H_S der Systemhamiltonian mit ΔE dem Energiesplitting des Qubits, σ sind die Pauli Matrizen, H_B ist der Badhamiltonian mit den Moden ω_i und den Erzeugern (Vernichtern) $b_i^+ = b_i^\dagger$ ($b_i^- = b_i$) und dem Kopplungshamiltonian H_C mit der Kopplungsstärke g_c . Die Pauli Matrizen σ_\pm und Eigenzustände von H_S sind definiert wie in Aufgabe 1 auf Blatt 6. Wir wollen, wie in der Vorlesung besprochen, die Mastergleichung für das 2-Zustandssystem aufstellen und lösen und betrachten $t_0 = 0$. Dabei ist ein Diagramm z.B. gegeben als

$$\begin{array}{c} t \\ \bar{q} \text{---} \textcircled{\tilde{\sigma}^\mp} q \\ \textcircled{\tilde{\sigma}^\pm} \text{---} q' \\ t' \end{array} = \langle q' | \tilde{\sigma}^\pm(t') | \bar{q}' \rangle \langle \bar{q} | \tilde{\sigma}^\mp(t) | q \rangle g_c^2 \sum_i \langle \tilde{b}_i^\pm(t') \tilde{b}_i^\mp(t) \rangle_B,$$

wobei $\tilde{A}(t) = e^{-\frac{i}{2}\Delta E\sigma_z t} A(t) e^{\frac{i}{2}\Delta E\sigma_z t}$, $\tilde{\sigma}^\pm(t) = \sigma_\pm e^{\pm i\Delta E t}$ und die Korrelationsfunktion definiert ist als

$$\sum_i \langle \tilde{b}_i^+(t) \tilde{b}_i^-(t') \rangle_B = C^-(t-t), \quad \sum_i \langle \tilde{b}_i^-(t) \tilde{b}_i^+(t') \rangle_B = C^+(t-t), \quad (2)$$

$$\sum_i \langle \tilde{b}_i^+(t) \tilde{b}_i^+(t') \rangle_B = 0, \quad \sum_i \langle \tilde{b}_i^-(t) \tilde{b}_i^-(t') \rangle_B = 0. \quad (3)$$

- (a) (8Pkt.) Stellen sie für $\rho_{11}(t)$ ($|q\rangle = |1\rangle$, $|q'\rangle = |1\rangle$) alle möglichen Diagramme mit einer Kontraktion auf und schreiben sie die Mastergleichung in Integralform. In Markov-Approximation lässt sich die Mastergleichung für das reduzierte Dichtematrixelement ρ_{11} schreiben als

$$\dot{\rho}_{11}(t) = -\sum_{i=0}^1 \rho_{ii}(t) \cdot \int_0^\infty d\tau \Sigma(\tau), \quad (4)$$

wobei $\Sigma(t-t')$ den Diagrammen entspricht, die zu benutzen sind und $\tau = t - t'$.

- (b) (7Pkt.) Stellen sie für $\rho_{01}(t)$ ($|q\rangle = |0\rangle$, $|q'\rangle = |1\rangle$) alle möglichen Diagramme mit einer Kontraktion auf und schreiben sie die Mastergleichung in Integralform. In Markov-Approximation lässt sich die Mastergleichung für das reduzierte Dichtematrixelement ρ_{01} schreiben als

$$\dot{\rho}_{01}(t) = -\rho_{01}(t) \cdot \int_0^\infty d\tau \Sigma(\tau). \quad (5)$$

Lösen sie die Mastergleichung mit Hilfe von $\int_0^\infty C^\pm(\pm t) e^{i\Delta E t} \approx \frac{1}{2} \mathcal{F}(C)^\pm(\pm\Delta E)$, wobei $\mathcal{F}(\cdot)$ der Fouriertransformierten entspricht.

(c) (5 Pkt.) Mit der Lösung von (b), lässt sich die Zeitentwicklung von (a) 'verbessern'

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} = & -\rho_{11}(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C^+(\tau) e^{i\Delta E\tau - \frac{1}{2}(\tilde{C}^+(-\Delta E) + \tilde{C}^-(\Delta E))|\tau|} \\ & + \rho_{00}(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C^-(\tau) e^{i\Delta E\tau - \frac{1}{2}(\tilde{C}^+(-\Delta E) + \tilde{C}^-(\Delta E))|\tau|} \end{aligned} \quad (6)$$

wobei $\tau = t - t'$ ist. Argumentieren sie, was dies diagrammatisch und physikalisch bedeutet.