

Übungen zu Physik der Quanteninformation WS 15

Dr. M. Marthaler  
C. Karlewski

Blatt 5  
Besprechung, 12.01.2016

1. Klassisches Modell für Dissipation

12 Punkte

Wir betrachten ein Teilchen mit Masse  $m$ , Dämpfung  $\gamma$  im Potential  $U(x)$  und die Gaußverteilte stochastische Größe  $\xi(t)$ . Dies erfüllt die Langevin-Gleichung

$$m \cdot \ddot{x} + m\gamma\dot{x} + U'(x) = \xi(t), \quad (1)$$

wobei  $\xi(t)$  die Eigenschaften hat:  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2m\gamma kT\delta(t-t')$ . Diese Gleichung soll nun aus einem mikroskopischen Modell für ein Teilchen gekoppelt an ein geeignetes Bad aus harmonischer Oszillatoren hergeleitet werden. Die Hamiltonfunktion, die dieses System beschreibt, ist gegeben durch  $H = H_0 + H_{Bad}$ ;  $H_0 = \frac{p^2}{2m} + U(x)$ ,

$$H_{Bad} = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{P_j^2}{2M_j} + \frac{M_j}{2} \Omega_j^2 \left( X_j - \frac{c_j}{M_j \Omega_j} x \right)^2 \right]. \quad (2)$$

Dabei sind  $X_j$  und  $P_j$  Ort und Impuls des  $j$ -ten Oszillators,  $M_j$  dessen Masse,  $\Omega_j$  die Frequenz und  $c_j$  die Kopplungsstärke. Die Verteilung der Kopplungsstärke ist gegeben durch die spektrale Dichte

$$J(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_j \frac{c_j^2}{M_j \Omega_j} \delta(\omega - \Omega_j). \quad (3)$$

(a) (3.Pkt.) Die Bewegungsgleichungen für das Teilchen und die Oszillatoren sind

$$m\ddot{x} + U'(x) - \sum_j c_j \left( X_j - \frac{c_j}{M_j \Omega_j^2} x \right) = 0; \quad M_j \ddot{X}_j + M_j \Omega_j^2 \left( X_j - \frac{c_j}{M_j \Omega_j^2} x \right) = 0 \quad (4)$$

Zeigen sie, dass die Lösung für den getriebenen harmonischen Oszillator gegeben ist durch

$$X_j(t) = \frac{c_j}{M_j \Omega_j} \int_{t_0}^t dt' \sin[\Omega_j(t-t')] x(t') + X_j^{(0)}(t) \quad (5)$$

$$\text{Homog. Lsg.: } X_j^{(0)}(t) = X_j(t_0) \cos[\Omega_j(t-t_0)] + \frac{\dot{X}_j(t_0)}{\Omega_j} \sin[\Omega_j(t-t_0)] \quad (6)$$

(b) (3Pkt.) Einsetzen in die Bewegungsgleichungen für das Teilchen liefert

$$m\ddot{x} + U'(x) + \sum_j \frac{c_j^2}{M_j \Omega_j^2} \left\{ x(t) - \Omega_j \int_{t_0}^t dt' \sin(\Omega_j(t-t')) x(t') \right\} = \xi(t) \quad (7)$$

$$\xi(t) = \sum_j c_j X_j^{(0)}(t). \quad (8)$$

Nutze partielle Integration, die initial Bedingung  $x(t_0) = 0$  und berechne  $\{\dots\}$ . Zeigen sie

$$\sum_j \frac{c_j^2}{M_j \Omega_j^2} \{\dots\} = \int_0^\infty d\omega \frac{2J(\omega)}{\pi\omega} \int_{t_0}^t dt' \cos(\omega(t-t')) \dot{x}(t') \quad (9)$$

Die daraus resultierende Gleichung ist

$$m\ddot{x} + m \int_{-\infty}^\infty dt' \Gamma(t-t') \dot{x}(t') + U'(x) = \xi(t) \quad (10)$$

$$\Gamma(t-t') = \frac{1}{m} \int_0^\infty d\omega \frac{2J(\omega)}{\pi\omega} \cos(\omega(t-t')) \Theta(t-t') \quad (11)$$

- (c) **(3 Pkt.)** Für den Rauschterm  $\xi(t)$  und eine zufällige Anfangsbedingung gilt  $\langle X_j(t_0) \rangle = \langle \dot{X}_j(t_0) \rangle = 0$ ,  $\langle X_i(t_0) X_j(t_0) \rangle \propto \delta_{ij}$ ,  $\langle X_i(t_0) \dot{X}_j(t_0) \rangle = \dots = 0$ . Aus dem klassischen Gleichverteilungssatz kann hergeleitet werden

$$\frac{M_j}{2} \Omega_j^2 \langle X_j^2(t_0) \rangle = \frac{M_j}{2} \langle \dot{X}_j^2(t_0) \rangle = \frac{1}{2} kT. \quad (12)$$

Berechnen sie  $\langle \xi(t) \rangle$  und  $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle$ .

- (d) **(3 Pkt.)** Benutzen sie die spektrale Dichte  $J(\omega) = \omega m \gamma$  und berechnen sie  $\Gamma(t-t')$ ,  $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle$  sowie die Spektralfunktion des Rauschens  $S(\omega) = 2 \int dt \langle \xi(t) \xi(0) \rangle e^{-i\omega t}$ . Letzteres entspricht dem Fluktuations-Dissipations-Theorem.

## 2. Gaußverteilung für mehrere Variablen

5 Punkte

Die Gauß-Verteilung  $\rho(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M)$  für die stochastischen Variablen  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M$  sei definiert durch

$$\rho(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M) = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{A})}{(2\pi)^M}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \varepsilon_i A_{ij} \varepsilon_j\right) \quad (13)$$

wobei  $\mathbf{A}$  eine symmetrische, positiv definite Matrix ist.

- (a) **(4 Pkt.)** Betrachten sie die charakteristische Funktion  $\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \langle e^{i \sum_{j=1}^M \lambda_j \varepsilon_j} \rangle$  und zeigen sie, dass

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \lambda_i [A^{-1}]_{ij} \lambda_j\right) \quad (14)$$

gilt.

Hinweis: Da  $\mathbf{A}$  symmetrisch ist, ist auch  $\mathbf{A}^{-1}$  symmetrisch.

- (b) **(1 Pkt.)** Berechnen sie mit Hilfe der charakteristischen Funktion die Kovarianz  $\langle \varepsilon_i \varepsilon_j \rangle$  und die Korrelation 4. Ordnung  $\langle \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_m \varepsilon_k \rangle$ .

$$\text{Hinweise: } \langle \prod_j^N \xi_j \rangle = \frac{1}{i^N} \frac{d^N \phi(\lambda_1, \dots, \lambda_M)}{\prod_j^N d\lambda_j} \Big|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_M = 0}$$

## 4. Atom im Strahlungsfeld

3 Punkte

Wir betrachten ein einzelnes Spin 1/2 Teilchen (am Platz  $\vec{r}_0 = \vec{0}$ ) gekoppelt an ein Strahlungsfeld mit vielen Moden mit den Wellenvektoren  $\vec{k}$ .

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}, \quad H_1 = \sum_{\vec{k}} \hbar g_{\vec{k}} (\sigma_+ a_{\vec{k}} + \sigma_- a_{\vec{k}}^\dagger) \quad (15)$$

wobei  $g_{\vec{k}}$  reell ist.

- (a) **(1 Pkt.)** Schreiben sie den Operator  $H_1$  im Wechselwirkungsbild bezüglich  $H_0$ .
- (b) **(2 Pkt.)** Berechnen sie unter der Verwendung der Goldenen Regel der Quantenmechanik die Übergangsraten  $\Gamma_{n \rightarrow n'}^{+ \leftrightarrow -}$  sowie  $\Gamma_{n \rightarrow n'}^{- \leftrightarrow +}$ . Die Indizes  $n$  und  $n'$  symbolisieren hier die Verteilung der Photonenzahlen auf die Moden  $n := \{n_{\vec{k}}\}$ ,  $n' := \{n'_{\vec{k}}\}$ . Zeigen sie zuerst, dass diese Raten geschrieben werden können in der Form,

$$\Gamma_{n \rightarrow n'}^{+ \leftrightarrow -} = 2\pi \sum_{\vec{k}} |\langle -, \{n'_{\vec{k}}\} | g_{\vec{k}} \sigma_- a_{\vec{k}}^\dagger | +, \{n_{\vec{k}}\} \rangle|^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\vec{k}}), \quad (16)$$

$$\Gamma_{n \rightarrow n'}^{- \leftrightarrow +} = 2\pi \sum_{\vec{k}} |\langle +, \{n'_{\vec{k}}\} | g_{\vec{k}} \sigma_+ a_{\vec{k}} | -, \{n_{\vec{k}}\} \rangle|^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\vec{k}}). \quad (17)$$

Summieren sie die Raten über alle möglichen Endzustände des Strahlungsfeldes  $\{n'_{\vec{k}}\}$ . Vereinfachen sie das Ergebnis, indem sie den Übergang von einem diskreten zu einem kontinuierlichen Strahlungsfeldes machen,  $\sum_{\vec{k}} = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ , und verwenden sie die Dispersionsrelation  $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$ .