Übungen zu Physik der Quanteninformation SS 14

Dr. M. Marthaler
C. Karlewski

Lösungsvorschlag zu Blatt 3
Besprechung, 27.11.2015

---

1. Präparierung eines Zustandes **8 Punkte**

(a) (3 Pkt.) Die neuen Grenzen für die einzelnen Abschnitte im zweiten Schritt sind: $x_L^1 = 0$, $x_R^1 = x_T/2$, $x_L^2 = x_T/2$, $x_R^2 = x_T$. Daraus folgt für die Wahrschneinlichkeiten $f^{(2)}(i)$

$$f^{(2)}(0) = \frac{\int_0^{x_T/4} p(x)dx}{\int_0^{x_T/2} p(x)dx} = \frac{\int_0^{x_T/4} p(x)dx}{f^{(1)}(0)} \tag{1}$$

$$f(2)(1) = \frac{\int_{x_T/2}^{x_T 3/4} p(x)dx}{\int_{x_T/2}^{x_T} p(x)dx} = \frac{\int_0^{x_T/4} p(x)dx}{1 - f^{(1)}(0)} \tag{2}$$

Der neue Zustand ergibt sich aus den Multiplikationen der einzelnen Rotationen an den jeweiligen Zustand

$$|\Psi_2\rangle = \sqrt{p_0^1}\,|0\rangle \left(\sqrt{f^{(2)}(0)}\,|0\rangle + \sqrt{1 - f^{(2)}(0)}\,|1\rangle\right) + \sqrt{p_1^1}\,|1\rangle \left(\sqrt{f^{(2)}(1)}\,|0\rangle + \sqrt{1 - f^{(2)}(1)}\,|1\rangle\right) \tag{3}$$

$$= \sqrt{f^{(1)}(0)} \frac{\sqrt{\int_0^{x_T/4} p(x)dx}}{\sqrt{f^{(1)}(0)}}\,|00\rangle + \sqrt{f^{(1)}(0)} \sqrt{\frac{f^{(1)}(0) - \int_0^{x_T/4} p(x)dx}{f^{(1)}(0)}}\,|01\rangle \tag{4}$$

$$+ \sqrt{1 - f^{(1)}(0)} \frac{\sqrt{\int_{x_T/2}^{x_T 3/4} p(x)dx}}{\sqrt{1 - f^{(1)}(0)}}\,|10\rangle + \sqrt{1 - f^{(1)}(0)} \sqrt{\frac{1 - f^{(1)}(0) - \int_{x_T/2}^{x_T 3/4} p(x)dx}{1 - f^{(1)}(0)}}\,|01\rangle \tag{5}$$

$$= \underbrace{\sqrt{\int_0^{x_T/4} p(x)dx}}_{\sqrt{p_0^2}}\,|00\rangle + \underbrace{\sqrt{\int_{x_T/4}^{x_T/2} p(x)dx}}_{\sqrt{p_1^2}}\,|01\rangle + \underbrace{\sqrt{\int_{x_T/2}^{x_T 3/4} p(x)dx}}_{\sqrt{p_2^2}}\,|10\rangle + \underbrace{\sqrt{\int_{x_T 3/4}^{x_T} p(x)dx}}_{\sqrt{p_3^2}}\,|11\rangle \tag{6}$$

(b) (2 Pkt.) Es gilt

$$p_i^{m-1} = \int_{x_L^i}^{x_R^i} p(x)dx. \tag{7}$$

Für die Grenzen im nächsten Schritt gilt $x_L^i = x_L^j$ und $x_R^i = x_R^j$. Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeiten $f^{(m)}(j)$

$$f^{(m)}(j) = \frac{\int_{x_L^j}^{(x_L^j + x_R^j)/2} p(x)dx}{\int_{x_L^j}^{x_R^j} p(x)dx} = \frac{\int_{x_L^j}^{(x_L^j + x_R^j)/2} p(x)dx}{p_i^{m-1}} \tag{8}$$

Für den nächsten Schritt der Unterteilung folgt dann

$$\sqrt{p_i^{m-1}}\,|i\rangle\left(\sqrt{f^{(m)}(j)}\,|0\rangle+\sqrt{1-f^{(m)}(j)}\,|1\rangle\right) \tag{9}$$

$$=\sqrt{p_i^{m-1}}\sqrt{\frac{\int_{x_L^j}^{(x_L^j+x_R^j)/2}p(x)dx}{p_i^{m-1}}}\,|i0\rangle+\sqrt{p_i^{m-1}}\sqrt{\frac{p_i^{m-1}-\int_{x_L^j}^{(x_L^j+x_R^j)/2}p(x)dx}{p_i^{m-1}}}\,|i1\rangle \tag{10}$$

$$=\underbrace{\sqrt{\int_{x_L^j}^{(x_L^j+x_R^j)/2}p(x)dx}}_{p_j^m}\,|i0\rangle+\underbrace{\sqrt{\int_{(x_L^j+x_R^j)/2}^{x_R^j}p(x)dx}}_{p_{j+1}^m}\,|i1\rangle \tag{11}$$

(c) (3 Pkt.) Es sind die 8 Wahrscheinlichkeiten $\int_{k/8}^{(k+1)/8}p(x)dx$ mit $p(x)=2x$ und $k\in 0,1,\dots 7$ zu berechnen:

$$|\Psi_3\rangle=\sqrt{\tfrac{1}{64}}\,|000\rangle+\sqrt{\tfrac{3}{64}}\,|001\rangle+\sqrt{\tfrac{5}{64}}\,|010\rangle+\sqrt{\tfrac{7}{64}}\,|011\rangle \tag{12}$$

$$+\sqrt{\tfrac{9}{64}}\,|100\rangle+\sqrt{\tfrac{11}{64}}\,|101\rangle+\sqrt{\tfrac{13}{64}}\,|110\rangle+\sqrt{\tfrac{15}{64}}\,|111\rangle \tag{13}$$

2. Suzuki-Trotter Formel **(8 Punkte)**

Zu erst ist zu zeigen, dass $e^XYe^{-X}=Y+[X,Y]$, wenn $[X,[X,Y]]=0$ und $[Y,[X,Y]]=0$. Dafür ist zu zeigen, dass

$$\sum_{n=0,k=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!}Y\frac{(-X)^k}{k!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}[X,Y]_m. \tag{14}$$

mit $[X,Y]_m=[X,[X,Y]_{m-1}]$ und $[X,Y]_0=Y$.

Induktionsbehauptung: $\frac{1}{m!}[X,Y]_m=\sum_{n+k=m}\frac{X^n}{n!}Y\frac{(-X)^k}{k!}$

Induktionsanfang: $m=0$ lhs $=Y=\frac{X^0}{0!}Y\frac{(-X)^0}{0!}=$ rhs

Induktionsschritt: Es gilt $\frac{1}{m!}[X,Y]_m=\sum_{n+k=m}\frac{X^n}{n!}Y\frac{(-X)^k}{k!}$,
zeige $\frac{1}{(m+1)!}[X,Y]_{m+1}=\sum_{n+k=(m+1)}\frac{X^n}{n!}Y\frac{(-X)^k}{k!}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(m+1)!}[X,Y]_{m+1}=&\frac{1}{(m+1)\cdot m!}[X,[X,Y]_m]\\ =&\frac{1}{(m+1)}[X,\sum_{n+k=m}\frac{X^n}{n!}Y\frac{(-X)^k}{k!}]\\ =&\sum_{n+k=(m+1)}\frac{X^n}{n!}Y\frac{(-X)^k}{k!}.\end{aligned} \tag{15}$$

Damit folgt direkt unter der Annahme $[X,[X,Y]]=0$ und $[Y,[X,Y]]=0$ die am Anfange zu zeigende Gleichung $e^XYe^{-X}=Y+[X,Y]$.

Um die nächste Relation zu beweisen definieren wir die Funktion $g(s)=e^{sX}e^{sY}$. Die Ableitung dieser Funktion nach s ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g(s)}{\mathrm{d}s}&=Xe^{sX}e^{sY}+e^{sX}Ye^{sY}\\ &=\left(X+e^{sX}Ye^{-sX}\right)g(s)=(X+Y+s[X,Y])\,g(s).\end{aligned} \tag{16}$$

Die Lösung dieser Gleichung für $s=1$ ist die zu zeigende Relation $e^{X+Y}=e^Xe^Ye^{-\frac{1}{2}[X,Y]}$.

Für die letzte Gleichung nutzen wir das $e^{\delta(X+Y)}=e^{\delta X}e^{\delta Y}e^{-\frac{\delta^2}{2}[X,Y]}$. Die Taylor Entwicklung der letzten Exponentialfunktion für kleine δ^2 liefert dann die gewünschte Relation $e^{\delta(X+Y)}=e^{\delta X}e^{\delta Y}\cdot\left[1+\mathcal{O}(\delta^2)\right]$.