Karlsruher Institut für Technologie SS 2011
Institut für theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler **01.06.11**
http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_359.php
Besprechungsdatum: **09.06.11**

Übungsblatt Nr. 5 zur Vorlesung „Ausgewählte Probleme der Quantenmechanik“

1 Relationen für statistische Größen

Wenn A eine Gauss-verteilte Größe ist, gilt

$$\langle A^n \rangle = (n-1)\langle A^2 \rangle \langle A^{n-2} \rangle \,. \tag{1}$$

Zeigen sie dass daraus folgt,

$$\langle \exp(A) \rangle = \exp\left[\frac{1}{2}\langle A^2 \rangle\right] \,. \tag{2}$$

Stellen sie dazu eine Differentialgleichung auf für $\langle \exp(\lambda A) \rangle$.

2 1/f-Rauschen

Die Funktion $X(t)$ sei eine klassische stochastische Variable. Sie ist charakterisiert durch die Korrelationsfunktion und das Rauschspektrum

$$\langle X(t)X(0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{-i\omega t} S(\omega) \,, \tag{3}$$

wobei $\langle \ldots \rangle$ das Ensemble-Mittel der Funktion ist. Hier haben wir Translationsinvarianz in der Zeit angenommen.

Häufig findet man 1/f Rauschen. D.h. die Spektralfunktion ist gegeben durch

$$S(\omega) = \frac{E_{1/f}^2 \Theta\left(\omega - \omega_{\min}\right)}{\omega} \,. \tag{4}$$

Für ein 2-Niveau-System unter dem Einfluss einer klassischen stochastischen Variable die an σ_z koppelt gilt (wie in der Vorlesung gezeigt)

$$\rho_{ab}(t) = e^{-i\omega_{ab}t} \rho_{ab}(0) e^{i\int_0^t X(t')dt'} \,. \tag{5}$$

Berechnen sie $\langle \rho_{ab}(t) \rangle$, wobei $X(t)$ Gauss-verteilt ist. Benutzen sie dazu

$$\int_{\omega_{\min}}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega t)}{\omega^3} \approx -\frac{1}{2} t^2 \left(-3 + 2\gamma + 2\log(2\omega_{\min} t]\right) \,, \tag{6}$$

das Ergebnis aus Aufgabe 1 und nehmen sie an, dass Ensemble-Mittlung und Integration über die Zeit vertauschen.

Bitte wenden ...

$\boxed{3}$ Die quasistatische Näherung

Ein 2-Niveau-System wird beschrieben durch den Hamilton-Operator,

$$H = \frac{1}{2}(\omega_{ab} + X)\sigma_z \,. \tag{7}$$

X ist dabei eine Gauss-verteilte Größe mit der Verteilungsfunktion $P(X) = \exp\left[-(X/W)^2\right]$. Diese Größe variiert so langsam das wir davon ausgehen können das sie für jede einzelne Zeitentwicklung konstant ist, und sich nur von Experiment zu Experiment ändert. Die Zeitentwicklung eines Matrix-Elements der Dichtematrix ist (wie in der Vorlesung gezeigt) gegeben durch

$$\rho_{ab}(t) = e^{-i(\omega_{ab}+X)t}\rho_{ab}(0)\,. \tag{8}$$

Berechnen sie den Mittelwert der Zeitentwicklung für die Mittlung über mehrere Experimente,

$$\langle \rho_{ab}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dX P(X) \rho_{ab}(t)\,. \tag{9}$$

$\boxed{4}$ Dekohärenz und die Lindblad-Gleichung

Nehmen sie an das die Bewegungsgleichung einer Dichtematrix eines 2-Niveau-Systems gegeben ist durch,

$$\dot{\rho} = -i\frac{1}{2}\omega_{ab}[\sigma_z, \rho] + \frac{\gamma_{ab}}{2}\left(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-\right) + \frac{\gamma_{ba}}{2}\left(2\sigma_+\rho\sigma_- - \sigma_-\sigma_+\rho - \rho\sigma_-\sigma_+\right)\,. \tag{10}$$

Dabei gilt,

$$\sigma_+|a\rangle = 0\ ,\ \sigma_-|a\rangle = |b\rangle\ ,\ \sigma_-|b\rangle = 0\ ,\ \sigma_+|b\rangle = |a\rangle\,. \tag{11}$$

Finden sie die Bewegungsgleichung für das Matrixelement $\rho_{ab}(t)$.