Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler
SS 2011
12.05.11

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_359.php
Besprechungsdatum: **26.05.11**

Übungsblatt Nr. 3 zur Vorlesung „Ausgewählte Probleme der Quantenmechanik“

Für beide Aufgaben sind die Zustände $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ gegeben, mit

$$\sigma_z|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle\,, \quad \sigma_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle\,. \tag{1}$$

1 Das zeitabhängige 2-Zustandssystem (Rabi-Oszillationen)

Die Zeitentwicklung des 2-Zustandssystems wird beschrieben durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\partial_t|\psi\rangle = (H_0 + H(t))|\psi\rangle \ \ ,\ H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z \ \ ,\ H(t) = \Omega_R\sigma_x\cos\left[\omega t + \varphi\right]\,. \tag{2}$$

Nehmen sie an dass gilt $\omega = \omega_0$ und transformieren sie die Schrödinger-Gleichung mit dem Ansatz

$$\psi = U|\psi_R\rangle\,, \quad U = e^{-i\omega\sigma_z t}\,. \tag{3}$$

Verwenden sie die Rotating-Wave-Approximation und berechnen sie nun die Zeitentwicklung des Zustandes $|\downarrow\rangle$ im rotierenden Bezugssystem.

2 Gültigkeit der Rotating-Wave-Approximation

Die Zeitentwicklung des 2-Zustandssystem wird beschrieben durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\partial_t|\psi\rangle = (H_0 + H(t))|\psi\rangle \ \ ,\ H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z \ \ ,\ H(t) = \Omega_R\sigma_x\cos\left[\omega t\right]\,. \tag{4}$$

Nehmen sie an dass gilt $\omega = \omega_0$ und transformieren sie die Schrödinger-Gleichung mit dem Ansatz $\psi = U|\psi_R\rangle$, $U = e^{-i\omega\sigma_z t/2}$, und diagonalisieren sie den zeitunabhängigen Teil des Hamilton-Operators. Der resultierende Hamilton-Operator kann in der Form

$$H_R = H_{R1} + H_{R2}(t) \ \ ,\ \ H_{R1} = \frac{1}{2}\Omega_R\tau_z\,, \tag{5}$$

geschrieben werden, wobei τ_z auf die Zustände

$$|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \ \ ,\ \ |g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)\,, \tag{6}$$

wirkt ($\tau_z|g\rangle = -|g\rangle$, $\tau_z|e\rangle = |e\rangle$).

Bitte wenden ...

$\boxed{2}$ Fortsetzung: Gültigkeit der Rotating-Wave-Approximation

a) Finden sie den zeitabhängigen Teil des Hamiltonians $H_{R2}(t)$ in der Basis von $|g\rangle$ und $|e\rangle$.

b) Finden sie in niedrigster Ordnung einer zeitabhängigen Störungstheorie die Korrekturen zum Zustand $|g\rangle$ durch den Störhamiltonian $H_{R2}(t)$. Verwenden sie dazu den Ansatz

$$|\psi\rangle = \left[|g\rangle + a_1 e^{2i\omega t}|g\rangle + b_1 e^{2i\omega t}|e\rangle + a_{-1} e^{-2i\omega t}|g\rangle + b_{-1} e^{-2i\omega t}|e\rangle\right] e^{i\Omega_R t/2} \tag{7}$$

Setzen sie $|\psi\rangle$ in die Schrödingergleichung ein und projizieren sie nacheinander auf $\langle g|$ und $\langle e|$. Um die Zeitabhängigkeit zu entfernen multiplizieren sie dann mit $e^{-2i\omega t}$ und $e^{2i\omega t}$ und integrieren sie über t von 0 bis π/ω.