Karlsruher Institut für Technologie SS 2011
Institut für theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler **14.04.11**
https://www.tfp.kit.edu/28_359.php

Übungsblatt Nr. 1 zur Vorlesung „Ausgewählte Probleme der Quantenmechanik“

1 Eigenzustände des getriebenen Oszillators unter Einwirkung einer Kraft
Gegeben sind die Fock-Zustände $|n\rangle$ für die gilt, $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$, wobei $a^\dagger$ und a die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators sind.

a) Zeigen sie das für den Verschiebungsoperator $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$ gilt:

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha\,. \tag{1}$$

b) Finden sie die Eigenzustände und Eigenenergien des Hamiltonians

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + f(a^\dagger + a)\,, \tag{2}$$

als Funktion der Fock-Zustände $|n\rangle$.

2 Eigenzustände des Oszillators unter Deformation des Potentials
Gegeben sind die Fock-Zustände $|n\rangle$ für die gilt, $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$, wobei $a^\dagger$ und a die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators sind.

a) Der sogenannte Squeezing-operator ist definiert durch $S(\xi) = \exp\left[(\xi^* a^2 - \xi {a^\dagger}^2)/2\right]$, mit $\xi = re^{i\Theta}$. Zeigen sie das gilt:

$$S^\dagger(\xi) a S(\xi) = a\cosh r - a^\dagger e^{i\Theta}\sinh r\,. \tag{3}$$

b) Finden sie die Eigenzustände und Eigenenergien des Hamiltonians

$$H = \hbar\delta\omega a^\dagger a + d({a^\dagger}^2 + a^2)\,, \tag{4}$$

als Funktion der Fock-Zustände $|n\rangle$.

Bitte wenden ...

$\boxed{3}$ Zeitliche Entwicklung des kohärenten Zustands

Der Hamiltonian eines harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$H = \hbar\omega a^\dagger a \,. \tag{5}$$

Zeigen sie dass für die zeitliche Entwicklung des kohärenten Zustands

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{6}$$

durch den gegebenen Hamiltonian, in der Ortsdarstellung $\psi(q) = \langle q|\alpha\rangle$, gilt:

$$|\psi(q,t)| \propto e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(q-q_0\cos(\omega t))^2} \,. \tag{7}$$

Geben sie q_0 in expliziter Form an.

$\boxed{4}$ Baker-Hausdorff

Zeigen sie dass gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2} \ \text{ mit } \ [[A,B],A] = 0 = [[A,B],B] \,. \tag{8}$$

Ein möglicher Weg besteht in der Definition eines Operators $G(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B}$. Mit der Ableitung von $G(\lambda)$ nach λ lässt sich eine homogene Differentialgleichung für $G(\lambda)$ bilden. Durch diese lässt sich obige Relation beweisen.