(a)

Aufgabe 1:

Dirac Gleichung $(\hbar i c\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc^2)\psi = 0$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Vektorpotential

$$\left(ic\gamma^{\mu}\hbar(\partial_{\mu} + ieA_{\mu}) - mc^2\right)\psi = 0$$

a) Wir definieren: $Q(\vec{A}) = c\,\vec{\sigma}\cdot\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)$

$\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ und $\partial_t \psi = 0$

$$\Rightarrow \begin{aligned} mc^2\phi_1 + Q(\vec{A})\phi_2 &= E\phi_1 \\ Q(\vec{A})\phi_1 - mc^2\phi_2 &= E\phi_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi_2 = (E + mc^2)^{-1} Q(\vec{A})\phi_1$$

$$\Rightarrow Q^2(\vec{A})\phi_1 = (E^2 - m^2c^4)\phi_1$$

$$Q^2(\vec{A}) = c^2\sigma^i\sigma^j\left(-i\hbar\partial_i - \frac{e}{c}A_i\right)\left(-i\hbar\partial_j - \frac{e}{c}A_j\right)$$

$$= c^2(\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma^k)\left(-i\hbar\partial_i - \frac{e}{c}A_i\right)\left(-i\hbar\partial_j - \frac{e}{c}A_j\right)$$

$$= c^2\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$$
$$+ c^2 i\epsilon_{ijk}\sigma^k\left(-\hbar^2\partial_i\partial_j + i\hbar\frac{e}{c}(\partial_i A_j + A_i\partial_j) + \left(\frac{e}{c}\right)^2 A_iA_j\right)$$

$\sigma^i\sigma^j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}$ $\quad \epsilon_{ijk}A_iA_j = (\vec{A}\times\vec{A})_k = 0$

$\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j f = (\vec{\nabla}\times\nabla f)_k = 0$ //

$$\epsilon_{ijk}(\partial_i A_j + A_i\partial_j)f = \epsilon_{ijk}(\partial_i A_j)f + \epsilon_{ijk}A_j(\partial_i f) + \epsilon_{ijk}A_i\partial_j f$$
$$= (\vec{\nabla}\times\vec{A})_k f + (\vec{A}\times\vec{\nabla}f)_k - (\vec{A}\times\vec{\nabla}f)_k = B_k f$$

Damit ergibt ~~es~~ sich:

$$Q^2(\vec{A}) = c^2 \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - ec\hbar\, \vec{B}\cdot\vec{\sigma}$$

$$= 2mc^2 H_p(\vec{A})$$

$$H_p(\vec{A}) = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\left(\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\right)^2 - \mu_B \vec{B}\cdot\vec{\sigma}$$

$$\Rightarrow H_p(\vec{A})\,\phi_1 = \frac{(E^2 - m^2c^4)}{2mc^2}\,\phi_1 = \tilde{E}\,\phi_1$$

Aufgabe 1)

b)

$$H_p(A) = \frac{1}{2m}\Big((-i\hbar\partial_x)^2 + (-i\hbar\partial_y - \frac{e}{c}Bx)^2$$
$$+ (-i\hbar\sigma_z)^2 \Big) - \mu_B B \sigma_z$$

Mit dem geg. Ansatz:

$$\Big(\Big(\frac{-i\hbar\partial_x}{2m}\Big)^2 + \frac{1}{2m}(\hbar k_y - \frac{e}{c}B_x)^2 - \mu_B B\sigma_z\Big)\chi(x) = \tilde{E}\chi$$

Wir wählen $\chi(x) = \bar{\chi}(x)|\sigma\rangle$

mit $\sigma_z|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle$

$$\Rightarrow \Big(\frac{(-i\hbar\partial_x)^2}{2m} + \frac{1}{2m}(\hbar k_y - \frac{e}{c}Bx)^2\Big)\bar{\chi}(x) = \tilde{E}_{\sigma,k_z}\bar{\chi}(x)$$

$$\tilde{E}_{\sigma,k_z} = \tilde{E} + \sigma\mu_B B - \frac{(\hbar k_z)^2}{2m}$$

$$\rightarrow \tilde{E}_{\sigma,k_z} = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2}) \Rightarrow \tilde{E} = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2}) + \frac{(\hbar k_z)^2}{2m} - \sigma\mu_B B$$

$$\tilde{E} = (E^2 - m^2c^4)/2mc^2$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{2mc^2\tilde{E} + m^2c^4}$$
$$= \sqrt{|e|c\hbar B n_\sigma + (c\hbar k_z)^2 + (mc^2)^2}$$

mit $n_\sigma = n + (1+\sigma)/2$

Aufg. 1: c)

$$E = \sqrt{|e| c \hbar B n_\sigma}$$

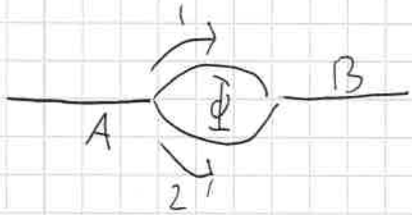
Unterschied zum normalen Quantenhall effekt:

schon ein Level bei $E = 0$

und Level nicht mehr equidistant

Aufg. 2:

$$I_{AB} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\cos\phi$$



Mit Magnetfeld $\quad \vec{p} \to \vec{p} - e\vec{A}$

$$\Rightarrow \phi_1 = \frac{1}{\hbar}\int_{1\,\cancel{\text{upper Arm}}} \vec{p}\cdot d\vec{l} = \frac{\sqrt{2mE}\,\pi r}{\hbar} - \frac{e}{\hbar}\int_{1\,\cancel{\text{upper arm}}} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

genauso 2

$$\Rightarrow \phi_2 - \phi_1 = \frac{e}{\hbar}\oint A\, d\vec{l} = \frac{e}{\hbar}\int_S B\cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{2\pi\,\Phi}{\Phi_0}$$