Aufgabe 1:

a)

$$H_{\pm} = \sum_{kk',\sigma} B_{k'k} \left(c^{\dagger}_{k'\sigma} c_{k\sigma} \pm c^{\dagger}_{-k-\sigma} c_{-k'-\sigma} \right)$$

$$c_{k\uparrow} = u_k^* \gamma_{k\uparrow} + v_k \gamma^{\dagger}_{k\downarrow} \qquad c^{\dagger}_{-k\downarrow} = -v_k^* \gamma_{k\uparrow} + u_k \gamma^{\dagger}_{k\downarrow}$$

$$c^{\dagger}_{k'\uparrow} c_{k\uparrow} = \left(u^*_{k'} \gamma^{\dagger}_{k'\uparrow} + v^*_{k'} \gamma_{k'\downarrow} \right) \left(u^*_k \gamma_{k\uparrow} + v_k \gamma^{\dagger}_{k\downarrow} \right)$$

Wir nehmen im weiteren an, dass u_k, v_k reel sind

$$\Rightarrow c^{\dagger}_{k'\uparrow} c_{k\uparrow} = u_{k'} u_k \gamma^{\dagger}_{k'\uparrow} \gamma_{k\uparrow} + v_{k'} v_k \gamma_{k'\downarrow} \gamma^{\dagger}_{k\downarrow} + u_{k'} v_k \gamma^{\dagger}_{k'\uparrow} \gamma^{\dagger}_{k\downarrow} + v_{k'} u_k \gamma_{k'\downarrow} \gamma_{k\uparrow}$$

$$c^{\dagger}_{-k\downarrow} c_{-k'\downarrow} = \left(-v^*_k \gamma_{k\uparrow} + u_k \gamma^{\dagger}_{k\downarrow} \right) \left(-v_{k'} \gamma^{\dagger}_{k'\uparrow} + u^*_{k'} \gamma_{k'\downarrow} \right)$$

$$= v_k v_{k'} \gamma_{k\uparrow} \gamma^{\dagger}_{k'\uparrow} + u_k u_{k'} \gamma^{\dagger}_{k\downarrow} \gamma_{k'\downarrow} - v_k u_{k'} \gamma_{k\uparrow} \gamma_{k'\downarrow} - u_k v_{k'} \gamma^{\dagger}_{k\downarrow} \gamma^{\dagger}_{k'\uparrow}$$

$$\Rightarrow B_{k'k} \left(c^{\dagger}_{k'\sigma} c_{k\sigma} \pm c^{\dagger}_{-k-\sigma} c_{-k'-\sigma} \right)$$ Übergang $k \to k'$

$$= B_{k'k} \Big[\left(u_{k'} u_k \mp v_{k'} v_k \right) \left(\gamma^{\dagger}_{k'\sigma} \gamma_{k\sigma} \pm \gamma^{\dagger}_{-k-\sigma} \gamma_{-k'-\sigma} \right) + \left(v_k u_{k'} \pm u_k v_{k'} \right) \left(\gamma^{\dagger}_{k'\sigma} \gamma^{\dagger}_{-k-\sigma} \pm \gamma_{-k'-\sigma} \gamma_{k\sigma} \right) \Big]$$

$$\Rightarrow M_{k,k'} = B_{k'k} \left(u_{k'} u_k \mp v_{k'} v_k \right)$$

Ohne Index k:

$$(uu' \mp vv')^2 = \frac{1}{4}\left(\left[\left(1+\frac{\xi}{E}\right)\left(1+\frac{\xi'}{E'}\right)\right]^{1/2} \mp \left[\left(1-\frac{\xi}{E}\right)\left(1-\frac{\xi'}{E'}\right)\right]^{1/2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(1+\frac{\xi}{E}+\frac{\xi'}{E'}+\frac{\xi\xi'}{EE'}\right)+\left(1-\frac{\xi}{E}-\frac{\xi'}{E'}+\frac{\xi\xi'}{EE'}\right) \mp 2\left[\underbrace{\left(1-\frac{\xi^2}{E^2}\right)}_{1-\frac{\xi^2}{E^2} = 1-\frac{\xi^2}{\xi^2+\Delta^2} = \frac{\Delta^2}{E^2}}\left(1-\frac{\xi'^2}{E'^2}\right)\right]^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi\xi'}{EE'} \mp \frac{\Delta^2}{EE'}\right)$$

Aufgabe 1b

$$M_{kk'} \longrightarrow \frac{1}{2} B_{k'k}\left(1 \mp 1 + \underbrace{\frac{\xi\xi'}{EE'}}_{\approx\Delta^2}\right)$$

Bei Übergang E nach E'

gilt $E = \sqrt{\xi^2+\Delta^2}$ $\rightarrow$ gleiches E für ξ und $-\xi$

$\Rightarrow$ nach Summation über beide Möglichkeiten

$$M(E,E') \rightarrow B_{k'k}(1 \mp 1)$$

D. h. das Matrixelement ist null für einen der beiden Prozesse

Aufgabe 1c) Goldene Regel:

$$\alpha_s = \int F(E, E+\hbar\omega)\, N_s(E)\, N_s(E+\hbar\omega)\,[f(E) - f(E+\hbar\omega)]\, dE$$

aber $F(E, E+\hbar\omega) = \sum_{\xi_k \in E,\, \xi_{k'} \in E+\hbar\omega} M_{kk'}$

unter der annahme dass $B_{kk} \approx B$

$$\Rightarrow \alpha_s = B^2 N(0)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{|E(E+\hbar\omega) \mp \Delta^2|\,(f(E) - f(E+\hbar\omega))}{(E^2-\Delta^2)^{1/2}\,((E+\hbar\omega)^2 - \Delta^2)^{1/2}} \times g(E)\, g(E+\hbar\omega)$$

$$\cancel{\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \frac{1}{\hbar\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dE}$$

$$g(E) = \begin{cases} 1 & |E| > \Delta \\ 0 & |E| < \Delta \end{cases}$$

$$\alpha_n = B^2 N^2(0)\, \hbar\omega$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \frac{1}{\hbar\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{|E(E+\hbar\omega) \mp \Delta^2|\,(f(E) - f(E+\hbar\omega))}{(E^2-\Delta^2)^{1/2}\,((E+\hbar\omega)^2 - \Delta^2)^{1/2}} \times g(E)\, g(E+\hbar\omega)$$

Aufgabe 1d)

$$\lim_{\hbar\omega \to 0} \frac{|E(E\cancel{+\hbar\omega}) - \Delta^2| \left(f(E) - f(E+\hbar\omega)\right)}{(E^2 \cancel{-} \Delta^2)^{1/2} \left[(E+\cancel{\hbar\omega})^2 - \Delta^2\right]^{1/2}}$$

$$= \lim_{\hbar\omega \to 0} \left[f(E) - f(E+\hbar\omega)\right]$$

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \lim_{\hbar\omega \to 0} \frac{1}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left[f(E) - f(E+\hbar\omega)\right] g(E)\, g(E+\hbar\omega$$

$$= - \int dE \, \frac{df}{dE} \, g^2(E)$$

$$= f(-\infty) - f(-\Delta) + f(\Delta) - f(\infty)$$

$$= 2 f(\Delta) = \frac{2}{1+e^{\Delta/kT}}$$