Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Lösung 13 (Bonus) – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20 Bonus - Punkte
Besprechung 12.02.2016

1. Lenz'scher Vektor

(2 + 4 + 4 = 10 Punkte)

(a) Wir betrachten eine Bewegung auf einer Kreisbahn mit $r = \text{const}$ und $\dot{\phi} = \text{const}$. Es gilt

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} -r\dot{\phi}\sin\phi \\ r\dot{\phi}\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2\dot{\phi} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Für den Lenz'schen Vektor erhalten wir dann mit $r^2F(r) = -mr^3\dot{\phi}^2$

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}}{r^2F(r)} - \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{1}{mr^3\dot{\phi}^2}\begin{pmatrix} mr^3\dot{\phi}^2\cos\phi \\ mr^3\dot{\phi}^2\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

(b) Es gilt Drehimpulserhaltung $\dot{\boldsymbol{L}} = 0$. Wir setzen $f(r) = r^2F(r)$ als Abkürzung und leiten den Lenz'schen Vektor ab

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}}{f(r)} - \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{3}$$

$$= -\frac{\ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}}{f(r)} + f'(r)\dot{r}\frac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}}{f^2(r)} - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} + \dot{r}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \tag{4}$$

$$= -\frac{\boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})}{mr^3} - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} + \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\boldsymbol{e}_r \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + f'(r)\dot{r}\frac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}}{f^2(r)} \tag{5}$$

$$= -\frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) - \dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})}{r^3} + \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})}{r^3} + f'(r)\dot{r}\frac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}}{f^2(r)} \tag{6}$$

$$= f'(r)\dot{r}\frac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}}{f^2(r)} \tag{7}$$

Da im Allgemeinen $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{L} \neq 0$, muss entweder $\dot{r} = 0$ (Kreisbahn) oder $f'(r) = 0 \implies F(r) \propto 1/r^2$.

(c) Bestimmen der Bewegungsgleichung mittels der Erhaltungsgrößen. Wir berechnen Drehimpuls und Lenz'schen Vektor:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2\dot{\phi} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}}{r^2F(r)} - \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{9}$$

$$= -\frac{m}{r^2F(r)}\begin{pmatrix} \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\phi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$= -\frac{m}{r^2F(r)}\begin{pmatrix} r^2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi + r^3\dot{\phi}^2\cos\phi \\ -r^2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r^3\dot{\phi}^2\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Wir wählen nun $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon, 0, 0)^\intercal$, d.h. wir drehen unser Koordinatensystem so um die z-Achse, dass der Lenz'sche Vektor in x-Richtung zeigt. Damit erhalten wir die folgenden Gleichungen

$$L = mr^2\dot{\phi} \tag{12}$$

$$\epsilon = -\frac{m}{r^2F(r)}r^2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi + \left(-\frac{m}{r^2F(r)}r^3\dot{\phi}^2 - 1\right)\cos\phi \tag{13}$$

$$0 = \frac{m}{r^2F(r)}r^2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + \left(-\frac{m}{r^2F(r)}r^3\dot{\phi}^2 - 1\right)\sin\phi \tag{14}$$

Einsetzen des Drehimpulses liefert:

$$p = -\frac{L^2}{mr^2F(r)} > 0 \tag{15}$$

$$\epsilon = -\frac{L}{r^2F(r)}\dot{r}\sin\phi + \left(\frac{p}{r} - 1\right)\cos\phi \tag{16}$$

$$0 = \frac{L}{r^2F(r)}\dot{r}\cos\phi + \left(\frac{p}{r} - 1\right)\sin\phi \tag{17}$$

Multiplikation der Gleichungen mit $\sin\phi$ bzw. $\cos\phi$ und Addition liefert:

$$\epsilon\cos\phi = \frac{p}{r} - 1 \tag{18}$$

$$r(\phi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\phi} \tag{19}$$

2. Rutherford Streuung

$(3 + 4 + 3 = 10$ Punkte$)$

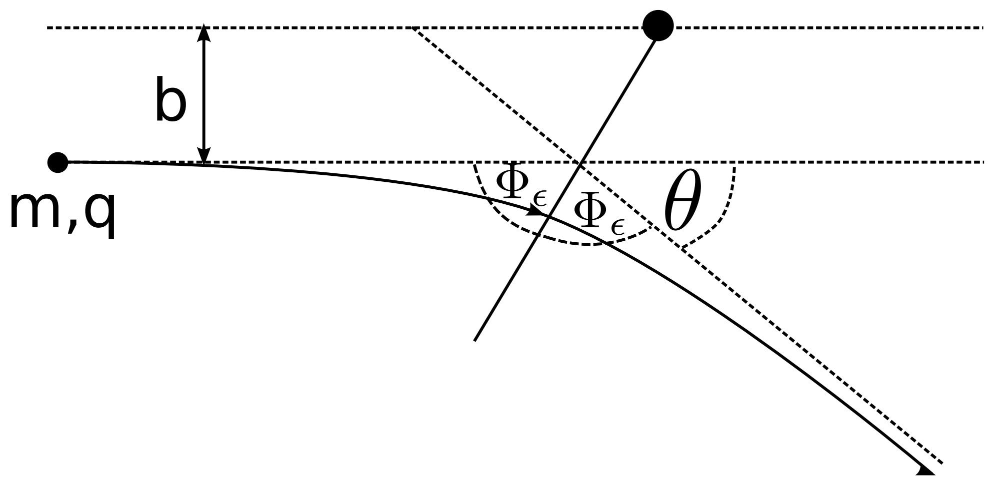

Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 2

(a) Im unendlichen verschwindet das Coulomb Potential das von Teilchen 2 erzeugt wird. Dadurch ist die Energie von Teilchen 1 nur durch die kinetische Energie bestimmt:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{20}$$

Da Teilchen 2 ruht, ist dies auch die Gesamtenergie des Systems, welche erhalten ist (abgeschlossenes System). Da ein Zentralpotential vorliegt, ist der Drehimpuls erhalten. Wir berechnen den Drehimpuls zum Zeitpunkt 0:

$$\boldsymbol{L}(t) = \boldsymbol{L}(0) = m\boldsymbol{r}(0) \times \dot{\boldsymbol{r}}(0) = mbv_0\boldsymbol{e}_z. \tag{21}$$

Die Bewegung findet entsprechend in der xy-Ebene statt.

(b) Wir wechseln direkt in Polarkoordinaten. Für den Drehimpuls gilt die bekannte Relation

$$L_z = mr^2\dot{\phi} = bv_0. \tag{22}$$

Weiterhin wissen wir von Blatt 11, dass de Geschwindigkeit in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi. \tag{23}$$

Damit finden wir die Energie des Teilchens

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \tag{24}$$

mit

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \tag{25}$$

Wir sehen direkt, dass für $\alpha > 0$ keine Lösung mit $E < 0$ existiert. Es gibt also keinen gebundenen Zustand. Wir suchen nun eine Lösung der Form $r = r(\phi)$. Benutzen wir den Drehimpuls finden wir

$$L = mr^2\dot{\phi} = mr^2\frac{d\phi}{dr}\dot{r} \tag{26}$$

und damit

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{mr^2}\frac{1}{\dot{r}} = \frac{L}{mr^2}\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}}. \tag{27}$$

Die letzte Relation lässt sich direkt integrieren:

$$\phi - \phi_0 = \pm\int_{r_0}^{r} dr'\frac{L}{mr'^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r'))}} \tag{28}$$

Mit der Substitution $s = 1/r$ findet man

$$\begin{aligned}\mp(\phi - \phi_0) &= \int_{s_0}^{s} ds'\frac{L}{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \alpha s' - \frac{L^2}{2m}s'^2)}} = \int_{s_0}^{s} ds'\frac{1}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{2\alpha m}{L^2}s' - s'^2}} \\ &= \int_{s_0}^{s} ds'\frac{1}{\sqrt{C - Bs' - s'^2}} = -\arcsin\frac{2s' + B}{\sqrt{B^2 + 4C}} + \text{const.} = \arcsin\frac{2s' + \frac{2\alpha m}{L^2}}{\sqrt{\frac{4\alpha^2m^2}{L^4} + 4\frac{2mE}{L^2}}} + \text{const.}\end{aligned} \tag{29}$$

$$\Rightarrow \mp(\phi - \phi') = \arccos\frac{1 + \frac{L^2}{\alpha m}s}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}} = \arccos\frac{1 + Ps}{\epsilon} \tag{30}$$

Dies liefert dann

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{P}\left(\epsilon\cos(\phi - \phi') - 1\right) \tag{31}$$

wobei ϕ' die Integrationskonstanten enthält. Wir wählen ϕ' so, dass der Abstand r minimal ist für $\phi = 0$. Dies liefert $\phi' = 0$ und wir erhalten die bekannte Lösung des Keplerproblems mit

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{m^2b^2v_0^4}{\alpha^2}}$$

$$P = \frac{L^2}{m\alpha} = \frac{mb^2v_0^2}{\alpha}$$

Da hier $E > 0$ ist $\epsilon > 1$, d.h. es liegen Hyperbeln und keine Ellipsen ($0 \le \epsilon < 1$) vor.

(c) Wir suchen nun den Streuwinkel θ. Dazu betrachten wir zunächst die asymptotischen Winkel für die $r(\phi_\infty) = \infty$. Diese Winkel lassen sich bestimmen aus

$$\epsilon \cos \phi_\infty - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_\infty = \pm \arccos(1/\epsilon) = \pm \phi_\epsilon \tag{32}$$

Aus geometrischen Betrachtungen (siehe Skizze) sieht man direkt

$$2\phi_\epsilon + \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi - 2\phi_\epsilon \tag{33}$$

Für den halben Streuwinkel finden wir dann mit $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\epsilon}\right) = 1/\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m^2 b^2 v_0^4}{\alpha^2}}} \tag{34}$$

Wie in Aufgabenteil a) bereits festgestellt existieren keine gebundenen Zustände. Um wieder einen gebundenen Zustand zu ermöglichen muss $\alpha < 0$ sein und damit müssen die Ladungen unterschiedliche Vorzeichen haben. Das Teilchen wird reflektiert für $\theta = \pi - 2\phi_\epsilon > \pi/2$, d.h. $2\phi_\epsilon < \pi/2$. Die Bedingung lautet also

$$\arccos \frac{1}{\epsilon} < \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\epsilon} < \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow v_0 < \ldots \tag{35}$$