Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik

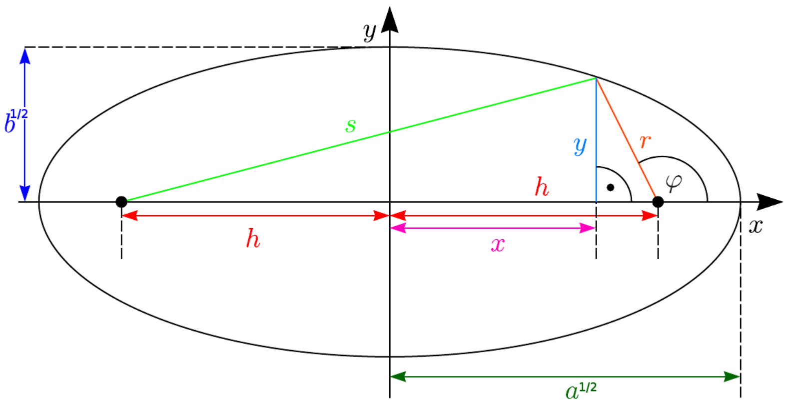
Lösung 12 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20+(5) Punkte
Besprechung 05.02.2016

1. Kegelschnitte & Ellipsengleichung (2 + 2 + (3) = 4 + (3) Punkte)

(a) Ellipsenkonstruktion: Es sei $L > 2h$:



Wir erkennen aus der Zeichnung folgende Zusammenhänge mittels Pythagoras:

$$r^2 = y^2 + (h-x)^2 \implies r = \sqrt{y^2 + (h-x)^2} \tag{1}$$

$$s^2 = y^2 + (h+x)^2 \tag{2}$$

$$r + s = L \implies s^2 = (L-r)^2 \tag{3}$$

Wir gehen nun aus von $y^2 + (h+x)^2 = s^2$ und nutzen die restlichen Beziehungen aus:

$$y^2 + (h+x)^2 = (L - \sqrt{y^2 + (h-x)^2})^2 = L^2 + y^2 + (h-x)^2 - 2L\sqrt{y^2 + (h-x)^2} \tag{4}$$

$$2hx = L^2 - 2hx - 2L\sqrt{y^2 + (h-x)^2} \Leftrightarrow 2L\sqrt{y^2 + (h-x)^2} = L^2 - 4hx \tag{5}$$

Durch Quadrieren ergibt sich weiter:

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot (y^2 + (h-x)^2) = \left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 - hx\right]^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^4 + h^2x^2 - 2hx\left(\frac{L}{2}\right)^2 \tag{6}$$

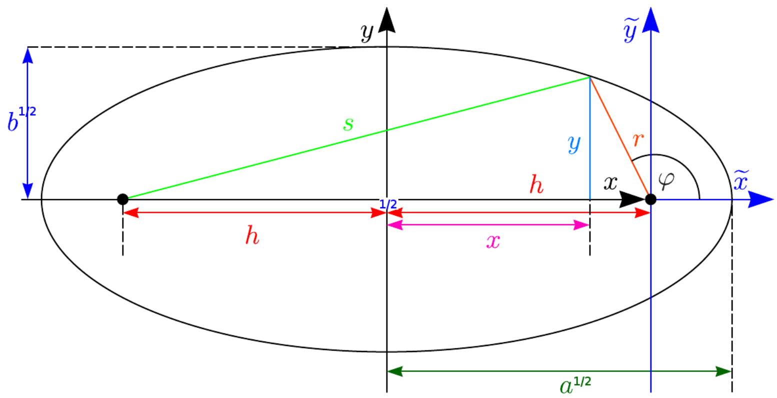
$$y^2 + h^2 + x^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{h^2x^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \Leftrightarrow x^2\left(1 - \frac{h^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}\right) + y^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 - h^2 \tag{7}$$

Wir erhalten also schließlich die angegebene Form für die Ellipse:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - h^2} = 1 \text{ mit } a = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \text{ und } b = \left(\frac{L}{2}\right)^2 - h^2 \tag{8}$$

$$h = \sqrt{a-b} \tag{9}$$

(b) Damit der rechte Brennpunkt der Ursprung eines neuen Koordinatensystems bildet, verschieben wir unser altes Koordinatensystem S (mit den Koordinaten x und y) nach rechts und erhalten das neue Koordinatensystem $\tilde{S}$ (mit den Koordinaten $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$):



Es gelten folgende Zusammenhänge zwischen den kartesischen Koordinaten (des alten und neuen Systems) und Polarkoordinaten:

$$r\cos\phi = \tilde{x} = x - h \text{ und } r\sin\phi = \tilde{y} = y \tag{10}$$

Wir gehen wieder aus von:

$$(x+h)^2 + y^2 = s^2 = (L-r)^2 \tag{11}$$

Wir erhalten durch Ersetzung von x und y durch r und ϕ:

$$(r\cos\phi + 2h)^2 + r^2\sin^2\phi = (2\sqrt{a} - r)^2 \Leftrightarrow r^2 + 4h^2 + 4hr\cos\phi = 4a + r^2 - 4\sqrt{a}r \tag{12}$$

$$(4h\cos\phi + 4\sqrt{a})r = 4(a - h^2) \tag{13}$$

Wir erhalten damit die angegebene Form für die Ellipse in Polarkoordinaten:

$$r(\phi) = \frac{b}{\sqrt{a} + h\cos\phi} = \frac{b/\sqrt{a}}{1 + \frac{h}{\sqrt{a}}\cos\phi} = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\phi} \text{ mit } p = \frac{b}{\sqrt{a}} \text{ und } \epsilon = \frac{h}{\sqrt{a}} \tag{14}$$

(c) Kegelschnitte: Wir setzen die Ebenengleichung

$$vy + wz = d \implies z = \frac{d - vy}{w} \tag{15}$$

in die Kegelgleichung ein:

$$x^2 + y^2 = z^2 = \left(\frac{d - vy}{w}\right)^2 = \frac{d^2}{w^2} + \frac{v^2}{w^2}y^2 - 2\frac{vd}{w^2}y \tag{16}$$

$$x^2 + y^2\left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right) + \frac{2vd}{w^2}y = \frac{d^2}{w^2} \tag{17}$$

Wir wollen nun die drei Fälle erhalten. Für $v^2 = w^2$ erhalten wir eine Parabel.

$$x^2 \pm 2\frac{d}{v}y = \frac{d^2}{v^2} \tag{18}$$

In den zwei anderen Fällen gilt $v^2 \neq w^2$. Wir formen um:

$$x^2 + \frac{w^2 - v^2}{w^2}y^2 + \frac{2vd}{w^2}y = \frac{d^2}{w^2} \tag{19}$$

$$x^2 + \frac{w^2 - v^2}{w^2}\left(y^2 + \frac{2vd}{w^2 - v^2}y\right) = \frac{d^2}{w^2} \tag{20}$$

$$x^2 + \frac{w^2 - v^2}{w^2}\left(y + \frac{vd}{w^2 - v^2}\right)^2 - \left(\frac{vd}{w^2 - v^2}\right)^2 = \frac{d^2}{w^2} \tag{21}$$

$$x^2 + \frac{w^2 - v^2}{w^2}\left(y + \frac{vd}{w^2 - v^2}\right)^2 = \frac{d^2}{w^2} + \left(\frac{vd}{w^2 - v^2}\right)^2 \tag{22}$$

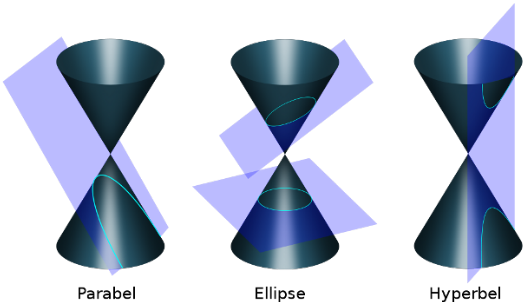
$$\tag{23}$$

Wir verschieben nun in der y-Koordinate:

$$x^2 + \frac{w^2 - v^2}{w^2}\tilde{y}^2 = \frac{d^2}{w^2} + \left(\frac{vd}{w^2 - v^2}\right)^2 \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

Wir erhalten für $w^2 > v^2$ eine Ellipse und für $w^2 < v^2$ eine Hyperbel.



2. Billardspiel

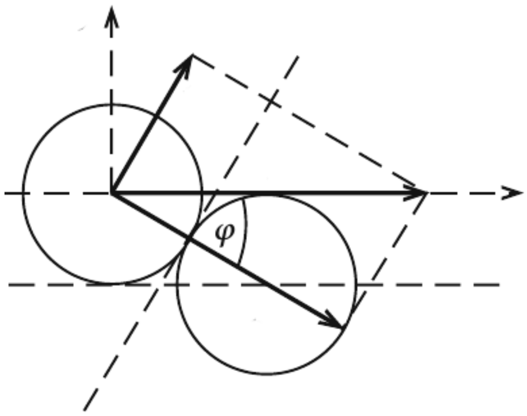
$(4 + 2 + (2) = 6 + (2)$ Punkte)

(a) Anmerkung: Bei dieser Aufgabe ist es nicht umbedingt nützlich im CMS zu rechnen. Das schöne am CMS ist, dass sich dann die beiden Impulse zu 0 aufheben. Das ist besonders dann sehr nützlich wenn sich im Laborsystem alle Stoßpartner bewegen. Hier bringt es nicht ganz soviel, da eine Kugel ruht.

Die Kugeln stoßen elastisch. Impulse im Laborsystem und CMS vor dem Stoß:

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{p}}_1 = \frac{\boldsymbol{p}}{2} = \begin{pmatrix} p_x/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{p}}_2 = -\frac{\boldsymbol{p}}{2} = \begin{pmatrix} -p_x/2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Wir wollen nun die Impulse $\boldsymbol{p}'_i$ und $\bar{\boldsymbol{p}}'_i$ nach dem Stoß ausrechnen. Für $|b| \geq r$ kommt es nicht zum Stoß und es gilt $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}'_i$. Im Fall $|b| < r$ zerlegen wir die Impulse vor dem Stoß in Komponenten parallel und senkrecht zur Berührungsebenen (ähnlich Skizze). Zwischen den Kugeln tritt keine Reibung auf, d.h. die Impulse parallel zur Berührungsebene bleiben erhalten.



Der Winkel ist gegeben durch $\phi = \arcsin(b/(2r))$. Zerlegung:

$$\boldsymbol{e}_\perp = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_\parallel = \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}_1 = \bar{p}_{1,\perp}\boldsymbol{e}_\perp + \bar{p}_{1,\parallel}\boldsymbol{e}_\parallel, \quad \bar{\boldsymbol{p}}_2 = -\bar{p}_{1,\perp}\boldsymbol{e}_\perp - \bar{p}_{1,\parallel}\boldsymbol{e}_\parallel \tag{28}$$

$$\bar{p}_{1,\perp} = \frac{p_x}{2}\cos\phi, \quad \bar{p}_{1,\parallel} = \frac{p_x}{2}\sin\phi. \tag{29}$$

Es gelten Impulserhaltung und Energieerhaltung:

$$\bar{\boldsymbol{p}}_1^2 + \bar{\boldsymbol{p}}_2^2 = (\bar{\boldsymbol{p}}_1')^2 + (\bar{\boldsymbol{p}}_2')^2 \tag{30}$$
$$2\bar{p}_{1,\perp}^2 = (\bar{p}_{1,\perp}')^2 + (\bar{p}_{2,\perp}')^2 \tag{31}$$
$$\bar{p}_{1,\|}' = \bar{p}_{1,\|}\,, \quad \bar{p}_{2,\|}' = -\bar{p}_{1,\|}\,, \quad \bar{p}_{1,\perp}' = -\bar{p}_{2,\perp}' \tag{32}$$

Daraus folgt, dass die senkrechte Komponente reflektiert wird, d.h.

$$\bar{p}_{1,\perp}' = -\bar{p}_{1,\perp}\,, \quad \bar{p}_{2,\perp}' = \bar{p}_{1,\perp} \tag{33}$$

und wir erhalten insgesamt

$$\bar{\boldsymbol{p}}_1' = \bar{p}_{1,\perp}'\boldsymbol{e}_\perp + \bar{p}_{1,\|}'\boldsymbol{e}_\| = -\frac{p_x}{2}\cos\phi\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix} + \frac{p_x}{2}\sin\phi\begin{pmatrix}\sin\phi\\ -\cos\phi\end{pmatrix} = \frac{p_x}{2}\begin{pmatrix}-\cos^2\phi+\sin^2\phi\\ -2\cos\phi\sin\phi\end{pmatrix} \tag{34}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}_2' = -\frac{p_x}{2}\begin{pmatrix}-\cos^2\phi+\sin^2\phi\\ -2\cos\phi\sin\phi\end{pmatrix} \tag{35}$$

Im Laborsystem erhält man

$$\boldsymbol{p}_1' = \frac{p_x}{2}\begin{pmatrix}1-\cos^2\phi+\sin^2\phi\\ -2\cos\phi\sin\phi\end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{p}_2' = \frac{p_x}{2}\begin{pmatrix}1+\cos^2\phi-\sin^2\phi\\ 2\cos\phi\sin\phi\end{pmatrix} \tag{36}$$

Berechnet man das Skalarprodukt $\boldsymbol{p}_1' \cdot \boldsymbol{p}_2' = 0$, d.h. die Impulse stehen senkrecht aufeinander, wie wir bereits in der anderen Stoßaufgabe für allgemeine Stöße zwischen Massenpunkte gleicher Masse gezeigt haben. Man kann noch $\cos\phi = \sqrt{1-(b/(2r))^2}$ und $\sin\phi = b/(2r)$ einsetzen.

(b) Die Kugel haben den Impuls p und Masse m. Wir zerlegen den Impuls in eine Komponente parallel und senkrecht zur Bande

$$p_y = p_\| = p\sin\alpha\,, \quad p_x = p_\perp = p\cos\alpha \tag{37}$$

Es gilt Impuls- und Energieerhaltung mit $m_{\text{Bande}} \to \infty$:

$$p_\| = p_\|'\,, \quad p_\perp = p_\perp' + p_{\text{Bande}}' \tag{38}$$
$$\frac{p_\perp^2}{2m} = \frac{p_\perp'^2}{2m} + \frac{p_{\text{Bande}}'^2}{2m_{\text{Bande}}} + U = \frac{p_\perp'^2}{2m} + U \tag{39}$$

Damit folgt

$$p_\perp' = \pm\sqrt{p_\perp^2 - 2mU} = \pm p\sqrt{\cos^2\alpha - 2mU/p^2} \tag{40}$$

Da die Kugel nicht durch die Bande hindurchfliegt gilt die negative Lösung. Wir erhalten insgesamt:

$$\boldsymbol{p} = p\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{p}' = p\begin{pmatrix}-\sqrt{\cos^2\alpha - 2mU/p^2}\\ p\sin\alpha\end{pmatrix} \tag{41}$$
$$\tag{42}$$

Die Bande hat den Impuls $\boldsymbol{p}_{\text{Bande}}' = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'$ aufgenommen.

(c) Den Impuls der anrollenden Kugel bezeichnen wir mit p, den der anderen mit q. Impulserhaltung:

$$\begin{pmatrix}p_x\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_x'\\ 0\end{pmatrix} + q'\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} + q'\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix} \implies p_x = p_x' + 2q'\cos\alpha \tag{43}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{p_x^2}{2m} = \frac{(p_x')^2}{2m} + \frac{2(q')^2}{2m} \implies p_x^2 = (p_x')^2 + 2(q')^2 \tag{44}$$

Damit folgt

$$p_x' = p_x - 2q' \cos\alpha \tag{45}$$
$$(p_x - 2q' \cos\alpha)^2 = p_x^2 - 2q'^2 \tag{46}$$
$$p_x^2 - 4p_x q' \cos\alpha + 4q'^2 \cos^2\alpha = p_x^2 - 2q'^2 \tag{47}$$
$$q' = p_x \frac{2\cos\alpha}{2\cos^2\alpha + 1} \tag{48}$$

Nun müssen wir noch die Geometrie einfließen lassen. Zum Zeitpunkt des Auftreffens bilden die Mittelpunkte der Kugeln ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $2r$. Damit folgt ein Impulsübertrag im Winkel von $30°$ zur x-Achse, d.h. $\alpha = \pi/6$. Damit folgt

$$q' = \frac{2\sqrt{3}}{5} p_x \approx 0.7\, p_x \tag{49}$$
$$p_x' = p_x - \sqrt{3} q' = \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right) p_x \approx 0.3\, p_x \tag{50}$$

In Vektorform:

$$\boldsymbol{p}' = p_x \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\sqrt{3}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_\pm = p_x \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{5} \end{pmatrix} \tag{51}$$

3. Verbundene Massen - Zentralkraft $(2+3+2+1+1+1 = 10$ Punkte$)$

(a) Die Gravitationskraft auf die Masse m_2 ist gegeben durch $\boldsymbol{F}_2 = -m_2 g \boldsymbol{e}_z$. Diese Kraft wird durch die Schnur direkt an das erste Teilchen weitergegeben, hat jetzt aber die Richtung $-\boldsymbol{e}_\rho$. Da die Gravitationskraft auf m_1 durch eine entgegengesetzte Kraft, die der Tisch auf das Teilchen ausübt, aufgehoben wird, ist die Kraft die auf Teilchen 2 wirkt gegeben durch $\boldsymbol{F}_1 = -m_2 g \boldsymbol{e}_\rho$. Der Drehimpuls für das erste Teilchen (Masse m_1) ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_1 = \rho \boldsymbol{e}_\rho \times m_1 \left(\dot\rho \boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot\phi \boldsymbol{e}_\phi\right) = m_1 \rho^2 \dot\phi \boldsymbol{e}_\rho \times \boldsymbol{e}_\phi = m_1 \rho^2 \dot\phi \boldsymbol{e}_z \tag{52}$$

wobei wir den Impuls $\boldsymbol{p}_1 = m_1 \boldsymbol{v}_1$ in Zylinderkoordinaten ausgedrückt haben ($\boldsymbol{v}_1 = \dot\rho \boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot\phi \boldsymbol{e}_\phi$). Da die Kraft auf das erste Teilchen eine Zentralkraft ist, bleibt der Drehimpuls erhalten, und es gilt:

$$L = m_1 \rho^2 \dot\phi = \text{const} \implies \dot\phi = \frac{L}{m_1 \rho^2} \tag{53}$$

Der Drehimpuls für das zweite Teilchen $\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0}$, weil $\boldsymbol{r}_2$ und $\boldsymbol{p}_2$ immer parallel zueinander stehen.

(b) Kinetischer Anteil:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot\rho^2 + 2\dot\rho\rho\dot\phi \boldsymbol{e}_\rho \cdot \dot{\boldsymbol{e}}_\phi + \rho^2\dot\phi^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot\rho^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot\rho^2 \tag{54}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\boldsymbol{r}_2 = h\boldsymbol{e}_z = (\rho - l)\boldsymbol{e}_z$ und damit $\boldsymbol{v}_2 = \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \dot\rho \boldsymbol{e}_z$. Nur die unter dem Tisch hängende Masse m_2 liefert einen Anteil zur potentiellen Energie, da wir das Nullniveau nach $\rho = l$, also $z = 0$ legen:

$$V = m_2 g(\rho - l) \tag{55}$$

Damit ergibt sich für die Gesamtenergie $E = T + V$:

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot\rho^2 + \frac{m_1}{2} \rho^2 \dot\phi^2 + m_2 g(\rho - l) \tag{56}$$

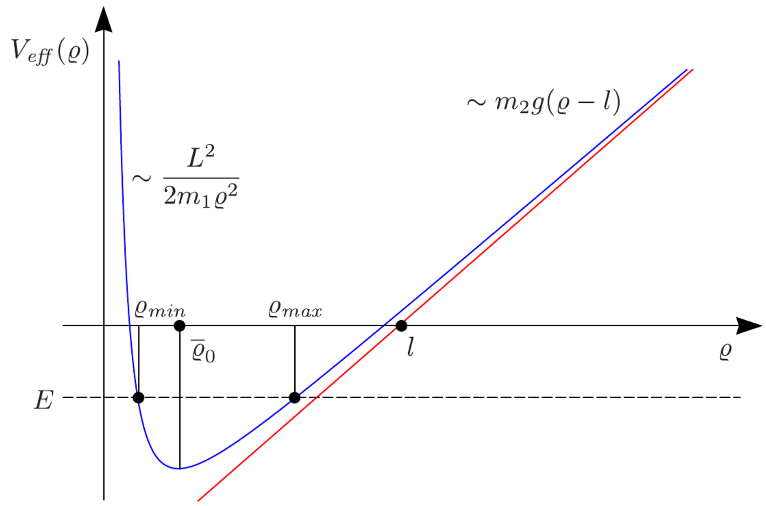
(c) Wir schreiben die Gesamtenergie E in folgender Form:

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho) \tag{57}$$

wobei

$$V_{\text{eff}}(\rho) = m_2 g(\rho - l) + \frac{m_1}{2}\rho^2 \cdot \left(\frac{L}{m_1\rho^2}\right)^2 = \frac{L^2}{2m_1\rho^2} + m_2 g(\rho - l) \tag{58}$$

Nun skizzieren wir das effektive Potential:



Das Maximum $\bar{\rho}_0$ erhalten wir durch Differenzieren nach ρ und anschließendem Nullsetzen:

$$\frac{d}{d\rho}V_{\text{eff}}(\bar{\rho}_0) = 0 \implies -\frac{2L^2}{2m_1\bar{\rho}_0^3} + m_2 g = 0 \implies \bar{\rho}_0 = \left(\frac{L^2}{m_1 m_2 g}\right)^{1/3} \tag{59}$$

(d) In diesem Fall oszilliert ρ zwischen den beiden Randwerten ρ_{min} und ρ_{max} (siehe Abbildung), die man aus der Bedingung $V_{\text{eff}}(\rho) = E$ herleiten kann. Physikalisch sieht es folgendermaßen aus: Teilchen 1 kreist herum, und es entsteht eine Zentrifugalkraft die das Teilchen nach aussen zieht. Die Gravitationskraft auf das zweite Teilchen wirkt dieser Zentrifugalkraft entgegen. Ist die Gravitationskraft größer, so bewegt sich das erste Teilchen zum Ursprung hin (ρ wird kleiner). Da der Drehimpuls $L = m_1\rho^2\dot{\phi}$ eine Erhaltungsgröße ist, muss sich die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ erhöhen. Dadurch wird die Zentrifugalkraft größer und größer. Ab einem bestimmten Zeitpunkt übersteigt die Zentrifugalkraft die Gravitationskraft und das erste Teilchen fängt an sich nach außen zu bewegen (ρ nimmt zu). Dadurch wird die Winkelgeschwindigkeit (und damit die Zentrifugalkraft) kleiner, bis die Zentrifugalkraft wieder kleiner ist als die Gravitationskraft und das ganze wieder von vorne anfängt.

(e) Da $V_{\text{eff}}(\rho) \to \infty$ für $\rho \to 0$, ist es unmöglich den Zustand $\rho = 0$ zu erreichen. Dies ist nur möglich, falls $L = 0$ und damit $\dot{\phi} = 0$.

(f) Wollen wir den Zustand $\rho = l$ erreichen, so muss gelten:

$$E = \frac{1}{2}m_1\rho_0^2\dot{\phi}_0^2 + m_2 g(\rho_0 - l) = V_{\text{eff}}(l) = \frac{L^2}{2m_1 l^2} = \frac{(m_1\rho_0^2\dot{\phi}_0)^2}{2m_1 l^2} = \frac{m_1\rho_0^4\dot{\phi}_0^2}{2l^2} \tag{60}$$

Also

$$\dot{\phi}_0 \geq \sqrt{\frac{2m_2 g(l - \rho_0)}{m_1(1 - \rho_0^2/l^2)\rho_0^2}} \tag{61}$$