KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK www.tfp.kit.edu

**Lösung 11 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16**

**Prof. Dr. G. Schön** **20 Punkte**
**Sebastian Zanker, Daniel Mendler** **Besprechung 29.01.2016**

## 1. Schwerpunktsystem & Vielteilchensystem (1 + 1.5 + 1.5 + 3 + 2 = 9 Punkte)

(a) Der Ursprung des CMS liegt bei $\boldsymbol{R}$. Damit gilt

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{R} \tag{1}$$

Leiten wir dies nun zweimal ab finden wir

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i' + m_i\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_i \tag{2}$$

(b) Der Gesamtimpuls ist

$$\boldsymbol{P} = \sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i' + \dot{\boldsymbol{R}}) = \sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i' + M\dot{\boldsymbol{R}}. \tag{3}$$

Der erste Summand, der nichts anderes als der Gesamtimpuls im CMS ist, auf der rechten Seite verschwindet:

$$\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i' = \sum_i m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i - \dot{\boldsymbol{R}}) = \underbrace{\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i}_{M\dot{\boldsymbol{R}}} - M\dot{\boldsymbol{R}} = 0 \tag{4}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt und wir wissen $\boldsymbol{P}' = 0$.

(c) Der Gesamtdrehimpuls ist

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i' - \boldsymbol{R}) \times (\dot{\boldsymbol{r}}_i' - \dot{\boldsymbol{R}}) \tag{5}$$

$$= \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i' \times \dot{\boldsymbol{r}}_i' + M\boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{R} \times \left(\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i'\right) - \left(\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i'\right) \times \dot{\boldsymbol{R}} \tag{6}$$

Wir wissen bereits aus b), dass die beiden Terme in Klammern verschwinden. Damit finden wir

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i' \times \dot{\boldsymbol{r}}_i' + M\boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{R}}. \tag{7}$$

(d) Bevor wir die erste Relation zeigen, betrachten wir zunächst die Bewegungsgleichung, die wir über $i$ summieren:

$$\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i,j} F_{ij} + \sum_i F_i = \sum_i F_i. \tag{8}$$

Damit zeigt man leicht:

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i F_i \tag{9}$$

Auch für den Drehimpuls lässt sich die Behauptung leicht zeigen:

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i + \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i \tag{10}$$

$$= \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \left(\sum_j F_{ij} + F_i\right) \tag{11}$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\sum_{i,j} \boldsymbol{r}_i \times F_{ij} = 0 \tag{12}$$

Wir zeigen dies folgendermaßen:

$$\sum_{i,j} \boldsymbol{r}_i \times F_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\boldsymbol{r}_i \times F_{ij} + \boldsymbol{r}_j \times F_{ji}\right) = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\boldsymbol{r}_i \times F_{ij} - \boldsymbol{r}_j \times F_{ij}\right) \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} = 0? \tag{14}$$

(e) Wir wollen noch zeigen, dass

$$\dot{\boldsymbol{L}}_S = \boldsymbol{R} \times \sum_i \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}. \tag{15}$$

Dazu summieren wir die Bewegungsgleichung im CMS

$$\sum_i m_i(\ddot{\boldsymbol{r}}_i' + \ddot{\boldsymbol{R}}) = M\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{16}$$

Damit finden wir

$$\dot{\boldsymbol{L}}_S = M\boldsymbol{R} \times \ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \times \sum_i \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}. \tag{17}$$

## 2. Zylinder (0 Punkte)

(a) Zeichnung

(b) Wir haben die Einheitsvektoren

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_z. \tag{18}$$

Wir zeigen die Normiertheit exemplarisch an einem Beispiel:

$$\tag{19}$$

$$uvece_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \tag{20}$$

Analog zeigen wir für ein Beispiel die Orthogonalität:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi = 0 \tag{21}$$

Alle anderen Fälle sind analog zu zeigen.

(c) Wir berechnen die Kreuzprodukte, wobei wir ausnutzen, dass die kartesischen Einheitsvektoren ein Rechtssystem bilden:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \times \hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= (\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y) \times (-\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y)\\ &= \cos^2\phi\,\underbrace{\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \hat{\boldsymbol{e}}_y}_{\hat{\boldsymbol{e}}_z} - \sin^2\phi\,\underbrace{\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \hat{\boldsymbol{e}}_x}_{-\hat{\boldsymbol{e}}_z} = (\cos^2\phi + \sin^2\phi)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned} \tag{22}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \times \hat{\boldsymbol{e}}_z = -sin\phi\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \hat{\boldsymbol{e}}z + \cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \hat{\boldsymbol{e}}_z = \sin\phi\hat{\boldsymbol{e}}_y + \cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_x = \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \tag{23}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\phi\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \hat{\boldsymbol{e}}_y = \cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_y - \sin\phi\hat{\boldsymbol{e}}_x = \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \tag{24}$$

Die drei Vektoren bilden also in der Reihenfolge $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$, $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ und $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ ein Rechtssystem.

(d) Die Einheitsvektoren des kartesischen Laborsystems sind konstant. Anders sieht es im Falle der Zylinderkoordinaten aus, bei denen die Einheitsvektoren positionsabhängig sind. Sie hängen damit über den Winkel $\phi$ von der Zeit ab:

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \frac{d}{dt}(\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y) = \dot{\phi}(-\sin\phi\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_y) = \dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \tag{25}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \cdots = -\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \tag{26}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_z = 0 \tag{27}$$

## 3. Bewegungsgl. in Z. (0 Punkte)

Gegebn ist der Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t) = \rho(t)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z(t)\hat{\boldsymbol{e}}_z$.

(a) Wir berechnen zunächst die Geschwindigkeit:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}(\rho(t)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z(t)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = \dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \rho\,\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\rho + \dot{z}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = \dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \dot{z}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{28}$$

Mit der Geschwindigkeit sowie den in Aufgabe 2 hergeleiteten Kreuzprodukten können wir nun den Drehimpuls berechnen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}/m = \boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} &= (\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z)\times(\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \dot{z}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) &(29)\\ &= \rho^2\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho\times\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \rho\dot{z}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho\times\hat{\boldsymbol{e}}_z + z\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\rho\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\hat{\boldsymbol{e}}_\phi &(30)\\ &= -z\rho\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + (z\dot{\rho} - \dot{z}\rho)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \rho^2\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z &(31)\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen nun die Beschleunigung

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \ddot{z}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{32}$$

Die Bewegungsgleichung lautet somit

$$(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \ddot{z}\hat{\boldsymbol{e}}_z = F_\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + F_\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + F_z\hat{\boldsymbol{e}}_z. \tag{33}$$

Da die Einheitsvektoren linear unabhängig sind, zerfällt die Gleichung in 3 gekoppelte DGL:

$$\begin{aligned}&\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 = F_\rho &(34)\\ &2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} = F_\phi &(35)\\ &\ddot{z} = F_z. &(36)\end{aligned}$$

(c) Wir wollen die Drehimpulserhaltung explizit zeigen. Dazu bilden wir znächst $\dot{\boldsymbol{L}}$:

$$\dot{\boldsymbol{L}}/m = \boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}} = (\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z)\times(F_\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + F_\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + F_z\hat{\boldsymbol{e}}_z) \tag{37}$$

Da $\boldsymbol{F}$ keinen Anteil in $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ Richtung hat, folgt $F_\phi = 0$. Damit finden wir

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \rho F_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho\times\hat{\boldsymbol{e}}_z + zF_\rho\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = (zF_\rho - \rho F_z)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = 0 \tag{38}$$

Im letzten Schritt haben wir hier den Hinweis auf dem Blatt verwendet.