Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Lösung 10 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön **20 Punkte**
Sebastian Zanker, Daniel Mendler **Besprechung 08.01.2016**

1. Gradient, Rotation und Divergenz (4 + (2) Punkte)

Wir benutzen in dieser Aufgabe die Summenschreibweise sowie die Einstein'sche Summenkonvention, d.h. über mehrfach auftretende Indizes wird summiert. Außerdem schreiben wir ∂_i^n für $\frac{\partial^n}{\partial x_i^n}$. DerNabla Operator schreibt sich dann als

$$\nabla = \partial_i \boldsymbol{e}_i$$

(i) Wir betrachten die $i - te$ Komponente von rot grad ϕ:

$$(\text{rot}\,\text{grad}\,\phi)_i = [\nabla \times (\nabla\phi)]_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\phi == 0$$

Bemerkung: Der Epsilon Tensor ist antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Indizes, d.h. $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$. Summiert man nun ein Produkt aus Epsilon Tensor und einer Funktion die symmetrisch unter Vertauschung zweier Indizes ist ($F_{ij} = F_{ji}$), verschwindet die Summe. Dies ist intuitiv klar, lässt sich aber auch relativ einfach zeigen:

$$\epsilon_{ijk}F_{ij} = \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk}F_{ij} + \epsilon_{jik}F_{ji}) = \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk}F_{ij} - \epsilon_{ijk}F_{ij}) = 0 \tag{1}$$

Im ersten Schritt haben wir ausgenutzt, dass wir Indizes, über die summiert wird (hier i und j) benennen können wie wir möchten und die Summe in zwei identische eile aufgeteilt. Im zweiten Schritt vertauschen wir nun im Epsilon Tensor und in F_{ji} die Indizes (kein Umbenennen). Dies ergibt ein zusätzliches Minuszeichen und die Summe verschwindet. Da $\boldsymbol{A}$ zweifach stetig diffbar ist, gilt $\partial_i\partial_j\phi = \partial_j\partial_i\phi$. Es handelt sich also um eine symmetrische Funktion und die Summe verschwindet.

(ii)

$$\text{div}\,\text{rot}\,\boldsymbol{A} = \text{div}(\epsilon_{ijk}\partial_j A_k \boldsymbol{e}_i) = \partial_l \epsilon_{ijk}\partial_j A_k \boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_i = \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0$$

(iii)

$$\text{div}\,\text{grad}\,\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \partial_i \boldsymbol{e}_i \cdot (\sum_j \partial_j \phi \boldsymbol{e}_j) = \partial_i\partial_j\phi\, \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \partial_i^2\phi = \Delta\,\phi$$

(iv)

$$\begin{aligned}[\text{rot}\,\text{rot}\,\boldsymbol{A}]_i = [\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\nabla \times \boldsymbol{A})_k = \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}\partial_l A_m \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m = (\delta_{il}\delta jm - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A_m \\ = \partial_j\partial_i A_j - \partial_j\partial_j A_i &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla\cdot\nabla\boldsymbol{A} = [\text{grad}\,\text{div}\,\boldsymbol{A} - \Delta\,A]_i\end{aligned}$$

(v)

$$\text{div}\,(\phi\boldsymbol{A}) = \partial_i(\phi A_i) = (\partial_i\phi)A_i + \phi\partial_i A_i = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi\,(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = (\text{grad}\,\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi\,(\text{div}\,\boldsymbol{A})$$

(vi)

$$\begin{aligned}[\operatorname{rot}(\phi \boldsymbol{A})]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\phi A_k) = \epsilon_{ijk}(A_k\partial_j\phi + \phi\partial_j A_k) = \epsilon_{ijk}A_k\partial_j\phi + \phi\epsilon_{ijk}\partial_j A_k \\ &= (\boldsymbol{A}\times(\nabla\phi))_i + \phi(\nabla\times\boldsymbol{A})_i = [\boldsymbol{A}\times(\operatorname{grad}\phi) + \phi\operatorname{rot}\boldsymbol{A}]_i\end{aligned}$$

2. Wegintegrale & Arbeit (6 + 4 + (2) = 10 + (2) Punkte)

Bevor wir beginnen, die einzelnen Aufgabenteile zu lösen, finden wir zuerst geeignete Parametrisierungen für die drei Wege i,ii und iii. Da alle Bewegungen in der xy-Ebene stattfinden und unsere Kräfte nicht von z abhängen, rechnen wir nur noch zwei dimensional mit $z = 0$ und $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (F_x(x,y), F_y(x,y))^\intercal$.

(i) Weg i beginnt bei $A = (L, 0)$ verläuft dann in $\boldsymbol{e}_y$ Richtung bis $P_1 = (L, L)$ und dann in negativer x-Richtung zu $B = (0, L)$. Wir teilen daher den Weg in zwei Teile auf mit Parametrisierung

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{i,1}(t) &= L\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}, \quad t\in[0,1] \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{i,1}(t) = L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{r}_{i,2}(t) &= L\begin{pmatrix}1-t\\1\end{pmatrix}, \quad t\in[0,1] \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{i,2}(t) = -L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(ii) Weg ii lässt sich in drei gerade Wege entlang der Koordinatenrichtungen aufteilen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{ii,1}(t) &= L\begin{pmatrix}1-2t\\0\end{pmatrix}, \quad t\in[0,1] \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{ii,1}(t) = -2L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{r}_{ii,2}(t) &= L\begin{pmatrix}-1\\t\end{pmatrix}, \quad t\in[0,1] \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{ii,2}(t) = L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{r}_{ii,3}(t) &= L\begin{pmatrix}t-1\\1\end{pmatrix}, \quad t\in[0,1] \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{ii,3}(t) = L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(iii) Weg iii ist ein Halbkreis mit Radius L und Mittelpunkt im Ursprung:

$$\boldsymbol{r}_{iii}(t) = L\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, \quad t\in[0,\pi/2] \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{iii}(t) = L\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

Wir können nun die Wegintegrale entlang der 3 Wege für eine allgemeine Kraft hinschreiben:

(i)

$$\begin{aligned}\int_{C_i}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{i,1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{i,2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_{i,1}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_{i,1}}{dt}dt + \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_{i,2}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_{i,2}}{dt}dt\\ &= L\int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_{i,1}(t))\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}dt - L\int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_{i,2}(t))\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}dt = L\int_0^1 [F_y(\boldsymbol{r}_{i,1}(t)) - F_x(\boldsymbol{r}_{i,2}(t))]\,dt\end{aligned}$$

(ii)

$$\int_{C_{ii}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = L\int_0^1 [-2F_x(\boldsymbol{r}_{ii,1}(t)) + F_y(\boldsymbol{r}_{ii,2}(t)) + F_x(\boldsymbol{r}_{ii,3}(t))]\,dt$$

(iii)

$$\int_{C_{iii}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = L\int_0^{\pi/2} [-F_x(\boldsymbol{r}_{iii}(t))\sin(t) + F_y(\boldsymbol{r}_{iii}(t))\cos(t)]\,dt$$

(a) Wir berechnen nun die drei Wegintegrale für die erste Kraft

$$\boldsymbol{F}_a = (y, 2x, 0)^\intercal \tag{2}$$

(i)

$$L\int_0^1 [F_y(\boldsymbol{r}_{i,1}(t)) - F_x(\boldsymbol{r}_{i,2}(t))]\,dt = L\int_0^1 [2x_{i,1}(t) - y_{i,2}(t)]\,dt = L\int_0^1 [2L - L] = L^2$$

(ii)

$$L\int_0^1 [-2F_x(\boldsymbol{r}_{ii,1}(t)) + F_y(\boldsymbol{r}_{ii,2}(t)) + F_x(\boldsymbol{r}_{ii,3}(t))]\,dt = L\int_0^1 [-2y_{ii,1}(t) + 2x_{ii,2}(t) + y_{ii,3}(t)]\,dt$$

$$= L^2\int_0^1 [0 - 2 + 1] - L^2$$

(iii)

$$L\int_0^{\pi/2} [-F_x(\boldsymbol{r}_{iii}(t))\sin(t) + F_y(\boldsymbol{r}_{iii}(t))\cos(t)]\,dt = L^2\int_0^{\pi/2} [2\cos^2 t - \sin^2 t]dt = \frac{\pi}{4}L^2$$

Um das Integral entlang einer geschlossenen Kontur zu berechnen, müssen wir Weg (ii) von Weg (i) abziehen (da die Wege eine unterschiedliche Orientierung haben):

$$\oint \boldsymbol{F}_a d\boldsymbol{r} = L^2 + L^2 = 2L^2 \neq 0 \tag{3}$$

Die Kraft ist also nicht konservativ. Die zweite Kraft

$$F_b(\boldsymbol{r}) = (2xy, x^2, 0)^\intercal \tag{4}$$

ist konservativ. Dies zeigen wir, indem wir zunächst die Rotation der Kraft berechnen:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = (0, 0, 2x - 2x)^\intercal = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

Die Rotation verschwindet also und die Kraft ist konservativ. Das Potential lässt sich hier raten und lautet

$$V_b(\boldsymbol{r}) = -x^2 y, \tag{6}$$

wie man leicht durch Nachrechnen bestätigt. Für jedes der drei Wegintegral von Punkt A nach B gilt also

$$\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = V_b(A) - V_b(B) = 0. \tag{7}$$

(b) Wir betrachten nun die Arbeit die wir mit usnerem Fahrrad gegen die Reibungskraft

$$F_R = -\alpha\dot{\boldsymbol{r}} \tag{8}$$

aufbringen müssen, um von A nach B zu kommen, wenn wir mit konstanter Geschwindigkeit v_0 fahren. Um der vorgegeben physikalischen Geschwindigkeit gerecht zu werden, müssen wir die Parametrisierung unseres Weges entsprechend anpassen, sodass sie dem tatsächlich mit dem Rad gefahrenen Weg $\boldsymbol{r}(t)$ entspricht (da die Kraft nicht explizit von der Zeit abhängt können wir immer von $t = 0$ starten):

$$\boldsymbol{r}_{i,1}(t) = \begin{pmatrix} L \\ v_0 t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \frac{L}{v_0}] \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{i,1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_{i,2}(t) = \begin{pmatrix} L - v_0 t \\ L \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \frac{L}{v_0}] \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{i,2}(t) = -\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit können wir nun die geleistete Arbeit entlang Weg i ausrechnen:

$$W_i = -\alpha \int_{C_{i,1}} \dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot d\boldsymbol{r} - \alpha \int_{C_{i,1}} \dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot d\boldsymbol{r} = -\alpha \int_0^{L/v_0} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] dt$$
$$= -\alpha \int_0^{L/v_0} v_0^2 dt - \alpha \int_0^{L/v_0} v_0^2 dt = -2\alpha v_0 L$$

Analog gehen wir für den zweiten Weg vor:

$$\boldsymbol{r}_{ii,1}(t) = \begin{pmatrix} L - v_0 t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\frac{L}{v_0}] \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{ii,1}(t) = \begin{pmatrix} -v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{r}_{ii,2}(t) = \begin{pmatrix} -L \\ v_0 t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \frac{L}{v_0}] \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{ii,2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{r}_{ii,3}(t) = \begin{pmatrix} -L + v_0 t \\ L \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \frac{L}{v_0}] \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{ii,3}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit finden wir

$$W_{ii} = \cdots = -4\alpha v_0 L$$

Wir müssen also hier beim doppelt so langen Weg auch die doppelte Arbeit aufbringen. Da die Reibung linear in der Geschwindigkeit ist dies auch zu erwarten.

Hier noch die Arbeit für den Halbkreis. War kein Teil der Aufgabe.

$$\boldsymbol{r}(t) = L \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$
$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = L\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Damit $|\dot{\boldsymbol{r}}| = L\omega = v_0 \Rightarrow \omega = v_0/L$.

$$W_{iii} = \int_0^{\pi/2\omega} L^2\omega^2 dt = \frac{\pi}{2} L^2 \omega = \frac{\pi}{2} v_0 L$$

(c) Die Lorentzkraft ist (es fehlt hier die Ladung in der Definition)

$$F_l = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}.$$

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren steht immer senkrecht auf diesen Vektoren. Damit ist die Kraft *immer* senkrecht zur Bewegungsrichtung und leistet entsprechend keine Arbeit:

$$(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{r} = (\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}) \cdot \dot{\boldsymbol{r}} dt = 0 \tag{9}$$

D.h. jedes Wegintegral (insbesondere also auch ein geschlossenes Integral) dieser Kraft verschwindet. Die Kraft ist zwar kein Kraftfeld, da sie auch von der Geschwindigkeit abhängt ist aber dennoch konservativ, auch wenn sie nicht mittels Potenzial darstellbar ist.

3. Schwerpunktsystem & Stoßexperiment $(1 + 1 + 3 + 1 + (2) = 6 + (2)$ Punkte)

(a) Gesamtimpuls der zwei Teilchen im Laborsystem entspricht dem Impuls des Masseschwerpunktes:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 = (m_1 + m_2)\frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2}{m_1 + m_2} = M\dot{\boldsymbol{R}} \tag{10}$$

(b) Ortsvektoren im CMS:

$$\bar{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R} \tag{11}$$

Gesamtimpuls der Teilchen im CMS:

$$\bar{\boldsymbol{P}} = m_1\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_1 + m_2\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_1 = m_1(\dot{\boldsymbol{r}}_1 - \dot{\boldsymbol{R}}) + m_2(\dot{\boldsymbol{r}}_2 - \dot{\boldsymbol{R}}) = m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 - M\dot{\boldsymbol{R}} \tag{12}$$

$$= m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 - (m_1+m_2)\frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2}{m_1+m_2} = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

(c) Teilchen 1 mit Impuls $\boldsymbol{p}$ stoße elastisch auf das im Laborsystem ruhendes Teilchen 2. Es gilt Impuls- und Energieerhaltung. Wir rechnen im Laborsystem, wobei die gestrichenen Größen, die Impulse nach dem Stoß bezeichnen.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' \tag{14}$$

$$p = p_1'\cos\alpha + p_2'\cos\beta \tag{15}$$

$$0 = p_1'\sin\alpha - p_2'\sin\beta \tag{16}$$

Auflösen:

$$p_2' = p_1'\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \tag{17}$$

$$p\sin\beta = p_1'(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) = p_1'\sin(\alpha+\beta) \tag{18}$$

$$p\sin\alpha = p_2'\sin(\alpha+\beta) \tag{19}$$

Man kann nur Winkel $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ betrachten (Negative Winkel durch Spiegelung). Wir führen ein $A = \sin^2\alpha$, $B = \sin^2\beta$. Wegen Quadrieren müssen wir später noch die Fälle $\alpha \in [0, \pi/2]$ vs. $\alpha \in [\pi/2, \pi]$ unterscheiden. Energieerhaltung (elastisch, d.h. ohne Energieübergang in innere Freiheitsgrade):

$$\frac{p^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \tag{20}$$

$$\sin^2(\alpha+\beta) = \sin^2\beta + \frac{m_1}{m_2}\sin^2\alpha \tag{21}$$

$$\left(\sqrt{(1-A)B} + \sqrt{A(1-B)}\right)^2 = B + \frac{m_1}{m_2}A \tag{22}$$

Lösen der quadratischen Gleichung:

$$2B = 1 - A\frac{m_1}{m_2} \pm \sqrt{(A-1)\left(A\frac{m_1^2}{m_2^2} - 1\right)} \tag{23}$$

$$2\sin^2\beta = 1 - \frac{m_1}{m_2}\sin^2\alpha \pm |\cos\alpha|\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\alpha} \tag{24}$$

$$\beta = \pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{m_1}{m_2}\sin^2\alpha \pm |\cos\alpha|\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\alpha}} \tag{25}$$

Die negative Lösung können wir streichen, d.h.

$$\beta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{m_1}{m_2}\sin^2\alpha \pm |\cos\alpha|\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\alpha}} \tag{26}$$

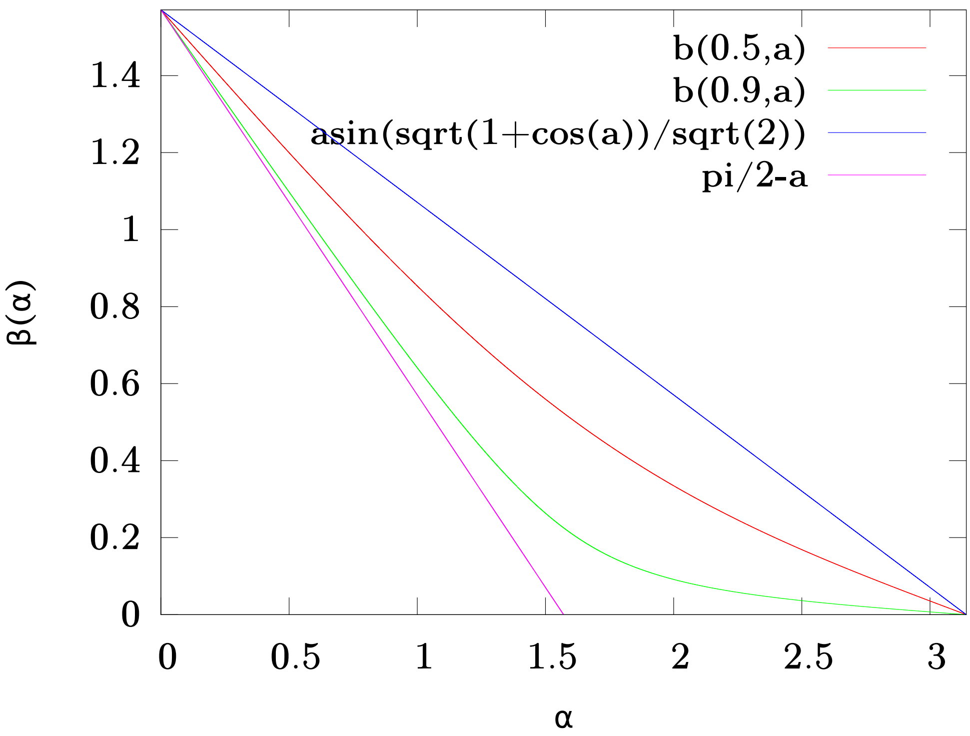

Abbildung 1: Winkel $\beta(\alpha)$ für gewisse Massenverhältnisse m_1/m_2

Durch Einsetzen in die Energieerhaltung finden wir, dass die korrekte Lösung gegeben ist durch (Unterscheidung $\alpha \in [0, \pi/2]$ vs. $\alpha \in [\pi/2, \pi]$):

$$\beta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{m_1}{m_2} \sin^2 \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \alpha}} \tag{27}$$

Den Fall $m_1/m_2 \to 1$ betrachten wir in der nächsten Aufgabe. Grenzfall $m_1/m_2 \to 0$ (Fall $m_2/m_1 \to 0$ entsprechend bzw durch Umbenennen der Variablen):

$$\beta = \arcsin \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \tag{28}$$

(d) Für gleiche Massen $m_1 = m_2$ erhalten wir

$$\sin^2(\alpha + \beta) = \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \tag{29}$$

$$2 \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha \pm \cos^2 \alpha \tag{30}$$

Der Fälle $\beta = 0$, α beliebig ist physikalisch unkorrekt (Division durch 0). Die Winkel sind auf Grund von Impulserhaltung eingeschränkt auf $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$. Wir erhalten also die Lösung $\beta = \arcsin \cos \alpha = \pi/2 - \beta$, d.h. die Teilchen fliegen in einem rechten Winkel auseinander.

(e) Impulse der Teilchen im CMS:

$$\mathbf{0} = \bar{\boldsymbol{p}}_1 + \bar{\boldsymbol{p}}_1 \implies \bar{\boldsymbol{p}}_1 = -\bar{\boldsymbol{p}}_2 \tag{31}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}_i = m_i \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_i = m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i - \dot{\boldsymbol{R}}) = \boldsymbol{p}_i - \frac{m_i}{M}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) \tag{32}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}_1 = \frac{m_2 \boldsymbol{p}_1 - m_1 \boldsymbol{p}_2}{M} \tag{33}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}_2 = \frac{m_1 \boldsymbol{p}_2 - m_2 \boldsymbol{p}_1}{M} \tag{34}$$

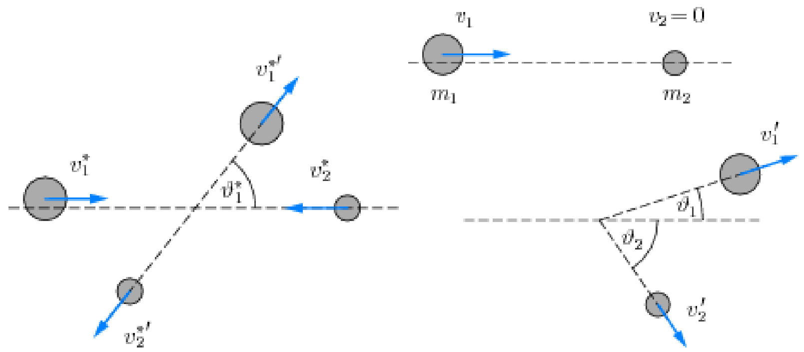

Abbildung 2: Skizzen (nicht ganz korrekt wegen ausgedehnte Massen), Quelle: `http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-41210-3_4/fulltext.html`

D.h. vor dem Stoß haben wir

$$\bar{\boldsymbol{p}}_1 = \frac{m_2}{M}\boldsymbol{p} \tag{35}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}_2 = -\frac{m_2}{M}\boldsymbol{p} \tag{36}$$

und nach dem Stoß

$$\bar{\boldsymbol{p}}_1' = \frac{m_2\boldsymbol{p}_1' - m_1\boldsymbol{p}_2'}{M} \tag{37}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}_2' = \frac{m_1\boldsymbol{p}_2' - m_2\boldsymbol{p}_1'}{M} \tag{38}$$

4. Bonusaufgabe: Stoke'scher Integralsatz ((4) Punkte)

Wir verifizieren den Stoke'schen Integralsatz, in dem wir beide Seiten berechnen. Beachten Sie, dass der Kreis einen Radius r hat.

$$\oint_{\partial A} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_A (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{39}$$

$$\oint_{\partial A} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} dt = \int_0^{2\pi} r^2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = r^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r^2 \tag{40}$$

$$\iint_A (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_A (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e}_z dx\, dy = \iint_A (\partial_x F_y - \partial_y F_x) dx\, dy = 2 \iint_A dx\, dy = 2\pi r^2 \tag{41}$$