Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Lösung 08 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön **20 Punkte**
Sebastian Zanker, Daniel Mendler **Besprechung 08.01.2016**

1. Fourier-Transformation (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

(a) (i)

$$\tilde{f}_1(\omega) = \int_{-t_0}^{t_0} dt\, e^{-i\omega t} = \frac{1}{i\omega}\left[e^{i\omega t_0} - e^{-i\omega t_0}\right] = \frac{2\sin(\omega t_0)}{\omega}$$

(ii)

$$\tilde{f}_2(\omega) = \int_0^\infty dt\, e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} = \left[\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{-(\alpha+i\omega)}\right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{\alpha + i\omega t} = \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

(iii)

$$\tilde{f}_3(\omega) = \Omega^{-1}\int_0^\infty dt\, e^{-\gamma t}\sin(\Omega t) e^{-i\omega t} = \frac{1}{2i\Omega}\int_0^\infty dt\, \left[e^{-(i\omega+\gamma-i\Omega)t} - e^{-(i\omega+\gamma+i\Omega)t}\right]$$
$$= \frac{1}{2i\Omega}\left[\frac{1}{i(\omega-\Omega)+\gamma} - \frac{1}{i(\omega+\Omega)+\gamma}\right] = \frac{1}{\Omega^2-\omega^2+2i\gamma\omega+\gamma^2}$$

Bemerkung: Für $\Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ erhält man gerade $\chi(\omega)$. Die Fouriertransformierte $\tilde{G}(\omega)$ der Green'schen Funktion $G(t)$ des harmonischen Oszillators ist also genau die Antwortfunktion $\chi(\omega)$.

(b) (i)

$$\tilde{g}_1(\omega) = \int_{-\infty}^\infty dt\, g(t-\alpha)e^{-i\omega t}$$

substituiere $t' = t - \alpha$, $dt' = dt$

$$\tilde{g}_1(\omega) = \int_{-\infty}^\infty dt'\, g(t')e^{-i\omega(t'+\alpha)} = e^{-i\omega\alpha}\int_{-\infty}^\infty dt'\, g(t')e^{-i\omega t'} = e^{-i\omega\alpha}\tilde{g}(\omega)$$

(ii)

$$\tilde{g}_2(\omega) = \int_{-\infty}^\infty dt\, g(\alpha t)e^{-i\omega t}$$

substituiere $t' = \alpha t$, $dt' = \alpha\, dt$

$$\tilde{g}_2(\omega) = \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha\infty}^{\alpha\infty} dt'\, g(t')e^{-i(\omega/\alpha)t'}$$

Für $\alpha > 0$ können wir $\alpha\infty$ durch ∞ ersetzen und können das Integral stehen lassen wie es ist. Für $\alpha < 0$ ändert sich jeweils das Vorzeichen vor ∞ und wir müssen die Integration „umdrehen" was ein zusätzliches „ $-$ " erzeugt. Mit $-\alpha = |\alpha|$ für $\alpha < 0$ finden wir damit

$$\tilde{g}_3(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^\infty dt'\, g(t')e^{-i(\omega/\alpha)t'} = \frac{1}{|\alpha|}\tilde{g}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

(c) Diese Relation zeigen wir mittels vollständiger Induktion. Der Induktionsanfang für $n = 0$ lautet

$$\tilde{g}_{4,0}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, g(t) e^{-i\omega t} = \tilde{g}(\omega) = (i\omega)^0 \tilde{g}(\omega)$$

Sei nun für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ die Relation $\tilde{g}_{4,n}(\omega) = (i\omega)^n \tilde{g}(\omega)$ erfüllt. Nun untersuchen wir $n \to n+1$ mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{4,n}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, g^{(n+1)}(t) e^{-i\omega t} &= g^{(n)}(t) e^{-i\omega t}\Big|_{t=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dt\, (-i\omega) g^{(n)} e^{-i\omega t} \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt\, g^{(n)} e^{-i\omega t} = i\omega \tilde{g}_{4,n}(\omega) = (i\omega)^n \tilde{g}(\omega)\end{aligned}$$

Im Schritt von Zeile 1 zu Zeile 2 haben wir ausgenutzt, dass die Ableitungen von g im unendlichen verschwinden.

2. Green'sche Funktion

$(1 + 3 + 1 + 1 + 2 = 8$ Punkte$)$

Wir betrachten die DGL

$$\mathcal{D}_t^{(1)} v = \left(\frac{d}{dt} + \alpha\right) v = \dot{v} + \alpha v = f(t) \tag{1}$$

(a) Die allgemeine Lösung der homogenen DGL kann mittels Exponentialansatz gefunden oder auch einfach geraten werden und lautet

$$v_h(t) = A e^{-\alpha t}. \tag{2}$$

Die Green'sche Funktion erfüllt

$$\mathcal{D}_t^{(n)} G(t) = \delta(t),\ G(t < 0) = 0. \tag{3}$$

Da $G(t < 0) = 0$ und für $t > 0$ die homogene DGL erfüllt machen wir den Ansatz

$$G(t) = \Theta(t) A_+ e^{-\alpha t} \tag{4}$$

(b) Um die Konstante A_+ zu bestimmen integrieren wir Gleichung (**??**) in einem infinitesimalen Bereich um $t = 0$. Betrachten wir zunächst die linke Seite (die rechte gibt trivialer Weise 1):

$$\begin{aligned}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dt\, \left[\dot{G}(t) + \alpha G(t)\right] &= G(\epsilon) - G(-\epsilon) + \alpha G(\xi(\epsilon)) \int_0^{\epsilon} dt\, 1 \\ &= G(\epsilon) - \alpha\epsilon G(\xi) = 1\end{aligned}$$

wobei $\xi \in [0, \epsilon]$. Hier haben wir ausgenutzt, dass $G(t \geq 0^+)$ stetig ist und den Mittelwertsatz der Integralrechnung angewandt. Die 1 am Ende entspricht der Integration der rechten Seite. Betrachten wir nun den Grenzfall $\epsilon \to 0$:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(G(\epsilon) - \alpha\epsilon G(\xi)\right) = G(0^+) = 1.$$

Wir schreiben $G(0^+)$ um klar zu machen, dass dies der rechtsseitige Grenzwert ist.

(c) Mit (b) und dem Ansatz aus (a) findet man direkt $A_+ = 1$ und damit

$$G(t - t') = \Theta(t - t') e^{-\alpha(t - t')}. \tag{5}$$

(d) Mit der Green'schen Funktion lässt sich eine partikuläre Lösung der DGL (**??**) schreiben als

$$v_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t - t') f(t') = \int_{-\infty}^{t} dt'\, f(t') e^{-\alpha(t - t')} \tag{6}$$

(e) Wir haben nun explizit $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$ Die partikuläre Lösung lautet also

$$v_p(t) = f_0 \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-\alpha(t-t')} \frac{1}{2i} \left(e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'} \right) = f_0 \frac{e^{-\alpha t}}{2i} \int_{-\infty}^{t} dt' \left(e^{(\alpha+i\omega)t'} - e^{(\alpha-i\omega)t'} \right)$$
$$= f_0 \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i\omega t}}{\alpha + i\omega} - \frac{e^{-i\omega t}}{\alpha - i\omega} \right) = \frac{f_0}{2i} \frac{1}{\alpha^2+\omega^2} (2i\alpha \sin\omega t - 2i\omega \cos\omega t) = f_0 \frac{\alpha \sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)}{\alpha^2+\omega^2}$$

3. Harmonischer Oszillator mit Kraftstoß (2 + 2 + 1 = 5 Punkte)

Wir betrachten die einen harmonischen Oszillator mit Kraftstoß

$$D_t^{(2)} x = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\Delta p}{m}\delta(t). \tag{7}$$

(a) Die aus der Vorlesung bekannte Lösung lautet

$$x(t) = \frac{\Delta p}{m}\Theta(t) e^{-\gamma t}\sin(\Omega t), \text{ mit } \Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2. \tag{8}$$

Diese können wir schreiben als

$$x(t) = \Theta(t) x_{h,1}(t), \text{ mit } x_{h,1} = \frac{\Delta p}{m} e^{-\gamma t}\sin(\Omega t). \tag{9}$$

Wir sehen, dass $x_{h,1}$ die homogene Gleichung erfüllt, d.h. $\ddot{x}_{h,1} + 2\gamma x_{h,1} + \omega_0^2 x_{h,1} = 0$. Wir berechnen nun die erste und zweite Zeitableitung von $x(t)$:

$$\dot{x} = \dot{\Theta}(t) x_{h,1} + \Theta(t)\dot{x}_{h,1} = \delta(t) x_{h,1} + \Theta(t)\dot{x}_{h,1} \tag{10}$$
$$\ddot{x} = \dot{\delta}(t) x_{h,1} + 2\delta(t)\dot{x}_{h,1} + \Theta(t)\ddot{x}_{h,1} \tag{11}$$

Wir setzen dies nun in die DGL (**??**) ein:

$$\Theta(t) \underbrace{\left[\ddot{x}_{h,1} + 2\gamma\dot{x}_{h,1} + \omega_0^2 x_{h,1}\right]}_{=0} + \dot{\delta}(t) x_{h,1} + 2\delta(t) \underbrace{(\dot{x}_{h,1} + x_{h,1})}_{e^{-\gamma t}\cos\Omega t} \tag{12}$$
$$= \dot{\delta}(t) x_{h,1} + 2\delta(t) e^{-\gamma t}\cos\Omega t \tag{13}$$

Um zu zeigen, dass $D_t^{(2)} x = \delta(t)$ müssen wir über eine Testfunktion f integrieren und zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left[D_t^{(2)} x(t)\right] f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta(t) f(t) = f(0) \tag{14}$$

Setzen wir nun unser Ergebnis (**??**) in das Integral oben ein finden wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left[D_t^{(2)} x(t)\right] f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\dot{\delta}(t) x_{h,1} + 2\delta(t) e^{-\gamma t}\cos\Omega t\right] f(t) \tag{15}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \dot{\delta}(t) x_{h,1} f(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt\, 2\delta(t) e^{-\gamma t}\cos(\Omega t) f(t) \tag{16}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \dot{\delta}(t) x_{h,1} f(t) + 2f(0) \tag{17}$$

Im ersten Integral müssen wir nun die Definition der Ableitung der δ-Funktion nutzen. Damit finden wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \dot{\delta}(t) x_{h,1} f(t) + 2f(0) = -\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta(t) \left[\dot{x}_{h,1}(t) f(t) + x_{h,1}(t)\dot{f}(t)\right] + 2f(0) \tag{18}$$
$$= -\left[\dot{x}_{h,1}(0) f(0) + x_{h,1}(0)\dot{f}(0)\right] + 2f(0) \tag{19}$$

Mit

$$x_h(0) = 0 \tag{20}$$
$$\dot{x}_{h,1}(0) = 1 \tag{21}$$

folgt dann

$$-\left[\dot{x}_{h,1}(0)f(0) + x_{h,1}(0)\dot{f}(0)\right] + 2f(0) = f(0) \tag{22}$$

womit wir gezeigt haben, dass $x(t)$ die DGL (**??**) erfüllt.

(b) Wir suchen nun eine Lösung für den Kriechfall. Da $x(t)$ für $t \neq 0$ die homogene DGL erfüllt, machen wir den Ansatz

$$x_p(t) = e^{-\gamma t} \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ A_+ \cosh(\Omega' t) + B_+ \sinh(\Omega' t) & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \tag{23}$$

mit $\Omega' = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Wir integrieren die DGL jetzt in einem infinitesimalen Bereich um $t = 0$:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dt \, \left[\ddot{x}_p(t) + 2\gamma \dot{x}_p(t) + \omega_0^2 x_p(t)\right] = \frac{\Delta p}{m}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{\epsilon \to 0} \left[\underbrace{\dot{x}(\epsilon) - \dot{x}(-\epsilon)}_{=\dot{x}_p(\epsilon) \to \dot{x}(0^+)} + \underbrace{2\gamma[x_p(\epsilon) - x_p(-\epsilon)]}_{\to 0, \text{ wegen Stetigkeit}} + \underbrace{\omega_0^2 \epsilon x_p(\xi)}_{\to 0} \right] = \frac{\Delta p}{m}$$
$$\Rightarrow \quad \dot{x}(0^+) = \frac{\Delta p}{m}$$

Nun bestimmen wir A_+ und B_+. Da wegen Stetigkeit $x(0) = 0$ folgt direkt $A_+ = 0$. Die Bedingung für $\dot{x}_p$ liefert

$$\dot{x}_p(0^+) = \Omega' B_+ = \frac{\Delta p}{m}$$
$$\Rightarrow \quad B_+ = \frac{\Delta p}{m\Omega'} \tag{24}$$

Damit finden wir

$$x_p(t) = \frac{\Delta p}{m\Omega'} \Theta(t) e^{-\gamma t} \sinh(\Omega' t) \tag{25}$$

(c) Die Green'sche Funktion ist dann gegeben durch

$$G(t - t') = \frac{1}{\Omega'} \Theta(t - t') e^{-\gamma t} \sinh(\Omega' t) \tag{26}$$