Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Lösung 07 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön **20 Punkte**
Sebastian Zanker, Daniel Mendler **Besprechung 11.12.2015**

1. Die Dirac'sche δ-Funktion (0 Punkte)

(a)

$$\text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \cos(x)\delta(x) = \cos(0) = 1 \tag{1}$$

$$\text{(ii)} \int_{0}^{\pi} dx\, \sin(x)\delta(x-\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1 \tag{2}$$

$$\text{(iii)} \int_{-\infty}^{0} dx\, \cos(x)\delta(x-\pi) = 0, \quad \text{da } \pi \text{ nicht im Integrationsbereich liegt} \tag{3}$$

(b) Wir führen die Variablentransformation $y = g(x)$ aus. Dann ist $dy = g'(x)dx$ und wir haben

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x)\delta(g(x)) = \int_{g(x_1)}^{g(x_2)} \frac{dy}{g'(g^{-1}(y))} f(g^{-1}(y))\delta(y) \tag{4}$$

Da $g(x)$ im Intervall $x_1 < 0 < x_2$ eine einfache Nullstelle hat, findet auch ein Vorzeichenwechsel zwischen $g(x_1)$ und $g(x_2)$ statt. Sei zunächst $g(x_1) < 0$. Dann ist

$$\int_{g(x_1)}^{g(x_2)} \frac{dy}{g'(g^{-1}(y))} f(g^{-1}(y))\delta(y) = \frac{f(g^{-1}(0))}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{f(x_i)}{g'(x_i)}. \tag{5}$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass $g(x)$ nur eine einfache Nullstelle im Integrationsbereich hat und damit $g^{-1}(0) = x_i$ eindeutig ist. Da $g(x_1) < g(x_2)$ ist außerdem $g'(x_i) > 0$ und damit $g'(x_i) = |g'(x_i)|$. Sei nun $g(x_1) > 0$ und damit $g(x_2) < 0$. Um dann die Definition der δ-Funktion ausnutzen zu können müssen wir die Integration „umdrehen", damit wieder *untere Grenze* $<$ *obere Grenze* gilt:

$$\begin{aligned}\int_{g(x_1)}^{g(x_2)} \frac{dy}{g'(g^{-1}(y))} f(g^{-1}(y))\delta(y) &= -\int_{g(x_2)}^{g(x_1)} \frac{dy}{g'(g^{-1}(y))} f(g^{-1}(y))\delta(y) \\ &= -\frac{f(g^{-1}(0))}{g'(g^{-1}(0))} = -\frac{f(x_i)}{g'(x_i)}.\end{aligned} \tag{6}$$

Da $g(x_2) < g(x_1)$ ist $g'(x_i) < 0$ und $-g'(x_i) = |g'(x_i)|$. Insgesamt haben wir also

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x)\delta(g(x)) = \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \tag{7}$$

(c) Wir wollen die Definition der ersten Ableitung plausibel machen (es handelt sich nicht um einen Beweis)

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x)\delta'(x) = [f(x)\delta(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx\, f'(x)\delta(x) = f'(0) \tag{8}$$

Hier haben wir das intuitive Bild der δ-Funktion $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$ ausgenutzt. Entsprechend kann man die zweite Ableitung definieren:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x)\delta''(x) = f''(0). \tag{9}$$

Man beachte den erneuten Vorzeichenwechsel durch zweifache partielle Integration.

2. Darstellungen der δ-Funktion

(3 + 3 = 6 Punkte)

(a) Wir betrachten die Funktionenfolge

$$\delta_{R,\epsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{für } |x| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{10}$$

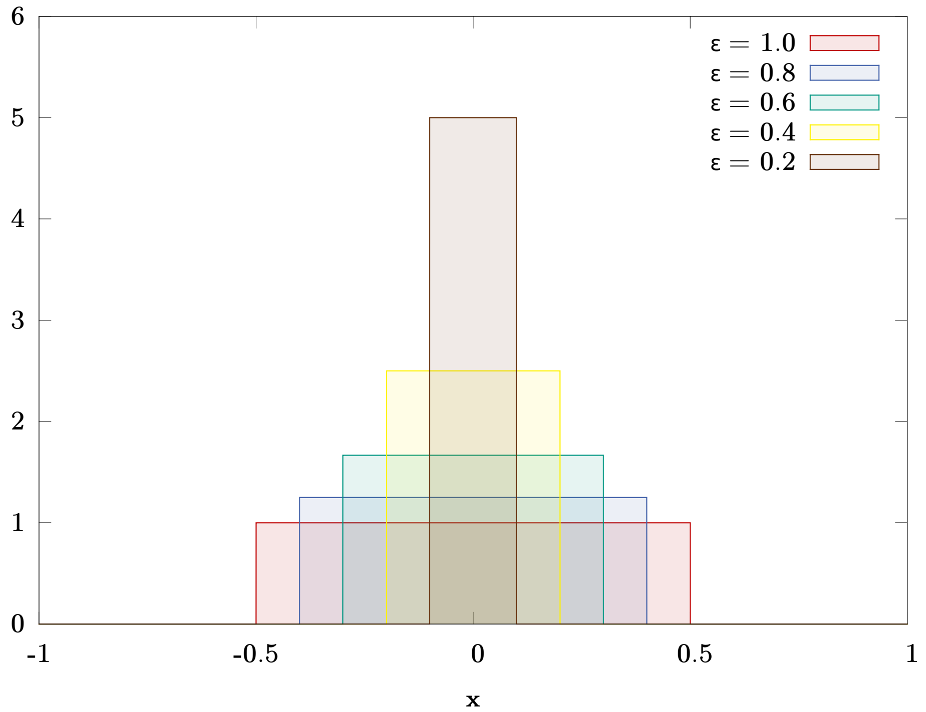

Abbildung 1: Rechteckfunktionen $\delta_{R,\epsilon}(x)$

(i) Wir skizzieren die Funktionen für verschiedene Werte von ϵ. Man sieht direkt, dass der Peak der Funktion immer schmaler und gleichzeitig höher wird, während der Flächeninhalt konstant 1 bleibt. Für $\epsilon \to 0$ nähert sich die Funktion vom Verhalten her also immer mehr dem intuitiven Verständnis der δ-Funktion, $\delta(0) = \infty$ und $\delta(x \neq 0) = 0$, an. Wichtig ist die Tatsache, dass der Flächeninhalt konstant 1 bleibt. Dadurch erhält die Funktion im Integral nicht zu viel Gewicht verglichen zur Testfunktion.

(ii) Wir wollen nun beweisen, dass die Rechteckfunktionen in der Tat eine Darstellung der δ-Funktion sind. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta_{R,\epsilon}(x) = f(0) \tag{11}$$

Da $\delta_{R,\epsilon}$ nur im Bereich $-\epsilon/2 \leq x \leq \epsilon/2$ ungleich Null ist, wir den Limes $\epsilon \to 0$ betrachten und $x_1 < 0$ sowie $x_2 > 0$ können wir direkt schreiben

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta_{R,\epsilon}(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} f(x)\delta_{R,\epsilon}(x) \tag{12}$$

Da weiterhin $f(x)$ per Vorraussetzung stetig ist und $\delta_{R,\epsilon}(x) \geq 0$ können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} f(x)\delta_{R,\epsilon}(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f(\xi) \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} dx\, \delta_{R,\epsilon}(x) \tag{13}$$

mit $\xi \in [-\epsilon/2, \epsilon/2]$. Das Integral lässt sich nun einfach berechnen, da $\delta_{R,\epsilon} = 1/\epsilon = \text{const.}$:

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(\xi) \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} dx\, \delta_{R,\epsilon}(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f(\xi). \tag{14}$$

Da $\xi \in [-\epsilon/2, \epsilon/2]$ folgt

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(\xi) = f(0) \tag{15}$$

(b) Wir wollen intuitiv zeigen, dass

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} \tag{16}$$

eine Darstellung der δ-Funktion ist. Dazu nutzen wir, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx-\epsilon|k|} \tag{17}$$

(da das Integral auf der linken Seite nicht konvergiert, ist auch hier der Grenzwert wieder in Kombination mit einer weiteren Integration zu verstehen.). Wir müssen also das Integral auf der rechten Seite berechnen. Da der Betrag von k auftaucht teilen wir die Integration in die Bereiche $k \le 0$ und $k > 0$ auf:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx-\epsilon|k|} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx+\epsilon k} + \int_{0}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx-\epsilon k} && (18)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ikx+\epsilon k}}{ix+\epsilon}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ikx-\epsilon k}}{ix-\epsilon}\right]_{0}^{\infty} && (19)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ix+\epsilon} + \frac{-1}{ix-\epsilon}\right] && (20)\\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} && (21)
\end{aligned}$$

Dies sind gerade die Lorentzfunktionen aus der Vorlesung. Damit folgern wir für $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \left[f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}\right] = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx-\epsilon|k|}\right] = f(0) \tag{22}$$

3. Technoradio

$(1+3+1+3\ (+2) = 8\ (+2)$ Punkte)

(a)

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = V(t) \tag{23}$$

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) \tag{24}$$

$$x(t) = Q(t), \quad \gamma = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{25}$$

$$f(t) = \frac{V(t)}{L} = \frac{V_{0,n}}{L} \cos\left[(\omega_T + n\omega)t + \alpha_n\right] \tag{26}$$

Alternativ kann auch $x(t) = LQ(t)$ und $f(t) = V(t)$ gewählt werden.

(b) Die allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus einem homogenen und einem partikulären Anteil.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad \text{wobei} \quad x_h(t) = e^{-\gamma t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) \quad \text{mit} \quad \Omega = \sqrt{|\omega_0^2 - \gamma^2|} \tag{27}$$

Nach kurzer Zeit ist der homogene Anteil abgeklungen und wir können $x(t) = x_p(t)$ betrachten. Die Lösung nach dem Einschwingvorgang ist dann eine Linearkombination der Schwingungen für unterschiedliche Frequenzen:

$$x(t) = \sum_{n=-n_{max}}^{n_{max}} x_n(t) \tag{28}$$

$$x_n(t) = \underbrace{\frac{V_{0,n}}{L}|\chi(\omega_T + n\omega)|}_{\hat{x}_n} \cos\left[(\omega_T + n\omega)t + \alpha_n + \varphi(\omega_T + n\omega)\right] \tag{29}$$

$$|\chi(\lambda)|^2 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4\gamma^2\lambda^2} \tag{30}$$

$$\tan\varphi(\lambda) = \frac{2\gamma\lambda}{\lambda^2 - \omega_0^2} \tag{31}$$

(c) Einstellen auf die Trägerfrequenz liefert:

$$\omega_T = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \implies L = \frac{1}{C\omega_T^2} \tag{32}$$

(d) Die Verstärkung der Spannung berechnet sich für die Winkelfrequenz $\omega_n = \omega_T + n\omega$ wie folgt (Größen mit Hut bezeichnen die Amplituden):

$$\frac{|\hat{V}_{C,n}|}{V_{0,n}} = \frac{|\hat{Q}_n|}{CV_{0,n}} = \frac{|\hat{x}_n|}{CV_{0,n}} = \frac{1}{CV_{0,n}}\frac{V_{0,n}}{L}\underbrace{|\chi(\omega_n)|}_{|\chi_n|} = \frac{|\chi(\omega_n)|}{LC} = \frac{1}{LC\sqrt{(\omega_T^2 - \omega_n^2)^2 + 4\gamma^2\omega_n^2}} \tag{33}$$

Wenn wir nun die maximale Verstärkung für $n = 0$ annehmen, dann erhalten wir

$$0.99 \leq \frac{|\chi(\omega_{max})|}{|\chi(\omega_T)|} = \frac{2\gamma\omega_T}{\sqrt{(\omega_T^2 - \omega_{max}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_{max}^2}} \tag{34}$$

$$\implies (\omega_T^2 - \omega_{max}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_{max}^2 - (2\gamma\omega_T/0.99)^2 \tag{35}$$

$$= \omega_{max}^4 - 2(\omega_T^2 - 2\gamma^2)\omega_{max}^2 + \omega_T^4 - (2\gamma\omega_T/0.99)^2 \leq 0 \tag{36}$$

Löst man die biquadratische Gleichung so erhält man:

$$\omega_{max}^2 = \omega_T^2 - 2\gamma^2 \pm \sqrt{(\omega_T^2 - 2\gamma^2)^2 - \omega_T^4 + (2\gamma\omega_T/0.99)^2} \tag{37}$$

Da $\omega_{max} > \omega_T$ erhält man als einzige Lösung:

$$\omega_n = \omega_T + n\omega \leq \omega_{max} = \sqrt{\omega_T^2 - 2\gamma^2 + \sqrt{(\omega_T^2 - 2\gamma^2)^2 - \omega_T^4 + (2\gamma\omega_T/0.99)^2}} \tag{38}$$

$$n \leq n_{max} = \frac{1}{\omega}\left(\sqrt{\omega_T^2 - 2\gamma^2 + \sqrt{(\omega_T^2 - 2\gamma^2)^2 - \omega_T^4 + (2\gamma\omega_T/0.99)^2}} - \omega_T\right) \tag{39}$$

Wenn man es genau nimmt, müsste man n_{max} noch abrunden, d.h.

$$n \leq n_{max} = \left\lfloor \frac{1}{\omega}\left(\sqrt{\omega_T^2 - 2\gamma^2 + \sqrt{(\omega_T^2 - 2\gamma^2)^2 - \omega_T^4 + (2\gamma\omega_T/0.99)^2}} - \omega_T\right)\right\rfloor \tag{40}$$

(e) (Bonusaufgabe) Wir wollen das asymptotisches Verhalten des Tangens bei $-\pi/2$ verwenden. Wir finden

$$\tan\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1 + O(\alpha^2)}{\alpha + O(\alpha^3)} = -\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1 + O(\alpha^2)}{1 + O(\alpha^2)} \tag{41}$$

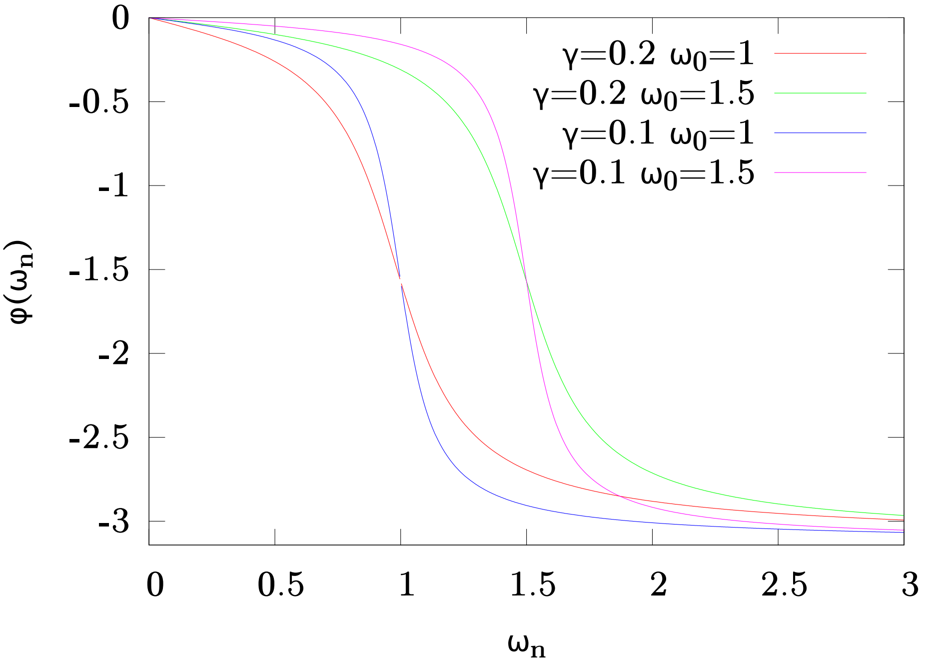

Abbildung 2: Phasenverschiebung $\varphi(\omega_n)$

Das heißt der Tangens besitzt bei $\pm\pi/2$ eine Polstelle 1. Ordnung. Die höheren Terme der Entwicklung können wir herleiten, indem wir zunächst die Polstelle durch Multiplikation mit α heben und anschließend entwickeln

$$-\frac{\alpha}{\tan\alpha} = -1 + \frac{\alpha^2}{3} + O(\alpha^4) \tag{42}$$

Damit erhalten wir die Reihenentwicklung

$$\tan\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{\alpha}\left(-1 + \frac{\alpha^2}{3} + O(\alpha^4)\right) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} + O(\alpha^3) \tag{43}$$

Bei der Reihe handelt es sich um eine Laurentreihe, da im Gegensatz zur Taylorreihe auch negative Potenzen von α auftreten. Verwenden wir nur die gröbste Approximation (bzw. das asymptotische Verhalten), so erhalten wir:

$$\tan\left(-\frac{\pi}{2} + \delta\varphi_{max}\right) \approx -\frac{1}{\delta\varphi_{max}} = \frac{2\gamma\omega_{max}}{\omega_{max}^2 - \omega_0^2} \implies \delta\varphi_{max} = \frac{\omega_T^2 - \omega_{max}^2}{2\gamma\omega_{max}} \tag{44}$$