KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK www.tfp.kit.edu

Blatt 12 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20+(5) Punkte
Besprechung 05.02.2016

Abgabe bis spätestens 03.02.2016

1. Kegelschnitte & Ellipsengleichung

$(2 + 2 + (3) = 4 + (3)$ Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit Kegelschnitten, insbesondere der Ellipse befassen. Die Punkte der Kegelschnitte (die nicht die Spitze des Kegels enthalten) werden durch folgende Gleichungen beschrieben $(a, b > 0)$:

$$\text{(i) Ellipse } \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1\,, \quad \text{(ii) Hyperbel } \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1\,, \quad \text{(iii) Parabel } ax^2 - y = 0\,.$$

(a) Eine Ellipse kann konstruiert werden, indem man einen Faden der Länge L an zwei Orten (auch Brennpunkte genannt) $(\pm h, 0)$ mit $h < L/2$ befestigt. Bewegt man den Stift bei gespanntem Faden, so erhält man eine Ellipse. Zeigen Sie, dass die Ellipsengleichung (i) gilt und berechnen Sie $a(h, L)$ und $b(h, L)$. Interpretieren Sie a und b. Berechnen Sie außerdem $h(a, b)$.

(b) Verschiebt man die Ellipse, so dass einer der Brennpunkte im Ursprung liegt, so können wir die Ellipse durch Zylinderkoordinaten beschreiben $(r(\phi), \phi, z)$. Zeigen Sie, dass in der xy-Ebene mit $z = 0$ die Ellipsengleichung durch

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}\,,\,, \quad 0 \leq \varepsilon < 1 \tag{1}$$

erfüllt ist. Bestimmen Sie $p(a, b)$ und $\varepsilon(a, b)$. Bestimmen Sie außerdem $\varepsilon(h, a)$. Für $\varepsilon > 1$ erhalten Sie übringens Hyperbeln.

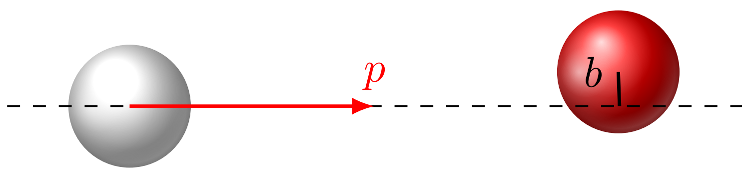
(c) *(Bonus)* Wir wollen die Bedeutung des Wortes Kegelschnitt geometrisch begründen. Dazu betrachten wir den Einheitskegel (bzw. die Oberfläche des Kegels) definiert durch $x^2+y^2 = z^2$. Wir schneiden den Kegel mit Ebenen der Form $ux + vy + wz = d$. Zeigen Sie, dass sie für bestimmte Parameter u, v, w und d die oben angegebenen Schnitte erhalten. Skizzieren Sie die drei Fälle. *Hinweis:* Aus Symmetriegründen können Sie $u = 0$ setzen. Lösen Sie dann die Gleichungen auf.

2. Billardspiel

$(4 + 2 + (2) = 6 + (2)$ Punkte)

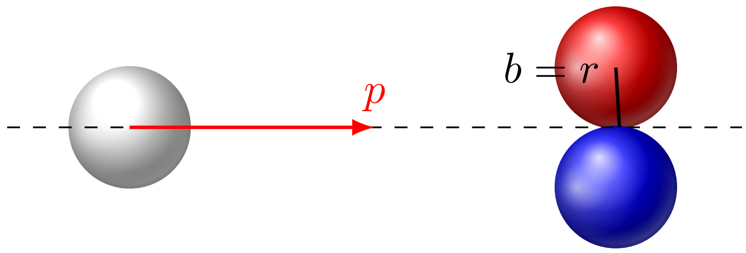
Letzten Abend - die beiden Übungsleiter Sebastian und Daniel sind gemeinsam mit einem der Elitetutoren Billardspielen. Dabei müssen Sie eine herbe Niederlage hinnehmen. Die Vermutung liegt nahe, dass einige theoretischen Grundlagen wieder aufgefrischt werden müssen. Es liegt an Ihnen, hier nachzuhelfen. Rechnen Sie mit Impulsen in zwei Dimensionen, da sich die Kugeln auf der Ebene des Billardtischs bewege.

(a) Die weiße Kugel stoße elastisch mit einem Impuls $\boldsymbol{p} = (p_x, 0)$ auf eine andere ruhende Kugel. Beide Kugeln haben die Masse m und den Radius r. Die Mittelpunkte der Kugeln seien in y-Richtung um den Stoßparameter b verschoben. Berechnen Sie die Impulse zuerst im Schwerpunkt- und dann im Laborsystem.



(b) Nach einiger Zeit werden die Übungsleiter sicherer und möchten gerne einen Stoß über die Bande ausführen. Die weiße Kugel treffe unter dem Winkel α zur Senkrechten auf die Bande. Nehmen Sie an, dass der Stoß inelastisch verläuft, da die Bande Energie U absorbiert und berechnen Sie den Impuls der weißen Kugel nach dem Stoß mit der Bande im Laborsystem. Welchen Impuls hat die Bande aufgenommen?

(c) *(Bonus)* Um einen Vorsprung aufzuholen sollen zwei Kugeln auf einmal versenkt werden. Die beiden Kugeln liegen bei $(0, \pm r)$ und die weiße Kugel liegt bei $(x_0, 0)$. Bestimmen Sie die Impulse der drei Kugeln nach dem Stoß. Beachten Sie die Symmetrie des Problems.



3. Verbundene Massen - Zentralkraft $\quad (2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$ Punkte)

Betrachten Sie zwei Punktmassen m_1 und m_2, verbunden durch eine Schnur (Länge l), die durch ein kleines Loch in einem Tisch reibungsfrei gleiten kann. m_1 bewegt sich auf dem Tisch, und wird durch die Polarkoordinaten (ρ, ϕ) beschrieben, wobei der Ursprung am Loch im Tisch liegt. m_2 hängt an der Schnur, auf einer Höhe $h = \rho - l$ relativ zur Tischplatte. Wir nehmen an, dass die Schnur stets gespannt bleibt. Wir werden ρ und ϕ als unabhängige Variablen benutzen.

(a) Was ist die Größe L des Drehimpulses $\boldsymbol{L} = L\boldsymbol{e}_z$. Zeigen Sie, dass die auf die Masse m_1 wirkende Kraft eine Zentralkraft ist. Benutzen Sie dann die Drehimpulserhaltung, um ϕ als Funktion von ρ und L auszudrücken.

(b) Was ist die Gesamtenergie $E = T + V$ (als Funktion von ρ, $\dot{\rho}$, und $\dot{\phi}$, wenn der Nullpunkt der potentiellen Energie bei $\rho = l$ gewählt wird? Hinweis: T hat einen Beitrag von der hängenden Masse, sowie einen radialen und Winkelbeitrag von der kreisenden Masse.

(c) Zeigen Sie, dass die Energie aus b) in die Form

$$E = (m_1 + m_2)\frac{\dot{\rho}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\rho) \quad \text{mit} \quad V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} + m_2 g(\rho - l) \tag{2}$$

gebracht werden kann. Zeichnen Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(\rho)$. Bestimmen Sie den Radius ρ_{min}, an dem das Minimum von V_{eff} liegt.

(d) Beschreiben Sie qualitativ die Bewegung des Systems, mit Anfangsbedingungen $\rho_0 \neq 0$, $\dot{\phi} \neq 0$, und $\dot{\rho}_0 = 0$ anhand der Skizze von $V_{\text{eff}}(\rho)$. Nehmen Sie an, das $V_{\text{eff}}(\rho) < E < 0$.

(e) Ist es für $\dot{\phi} \neq 0$ und $\rho_0 \neq 0$ möglich, dass das hängende Teilchen das kreisende durchs Loch hinunterzieht?

(f) Was ist, für gegebenen Anfangsradius ρ_0 und $\dot{\rho} = 0$, die kleinste Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\phi}_{0,\text{min}}$, der kreisende Masse, für die das hängende Teilchen (durch die Zentrifugalkraft des kreisenden) bis auf den Tisch heraufgezogen wird?