Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Blatt 10 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20+(10) Punkte
Besprechung 22.01.2016

Abgabe bis spätestens 20.01.2016

1. Gradient, Rotation und Divergenz

(4 + (2) Punkte)

Gegeben seien ein skalares Feld $\phi(\boldsymbol{r})$ und ein Vektorfeld $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$. Beide Felder seien zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann folgende Relationen gelten:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi(\boldsymbol{r}) = 0\\
&\text{(ii)} && \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0\\
&\text{(iii)} && \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi(\boldsymbol{r}) = \Delta\,\phi(\boldsymbol{r})\\
&\text{(iv)} && \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) - \Delta\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\\
&\text{(v, Bonus)} && \operatorname{div}(\phi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\operatorname{grad}\phi(\boldsymbol{r}) + \phi(\boldsymbol{r})\operatorname{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\\
&\text{(vi, Bonus)} && \operatorname{rot}(\phi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) = \operatorname{grad}\phi(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \phi(\boldsymbol{r})\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})
\end{aligned}$$

wobei der *Laplace*-Operator Δ gegeben ist durch

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{1}$$

Hinweis: Man kann hier gut die Summenschreibweisen üben, also z.B.

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i, \quad \text{usw}\ldots$$

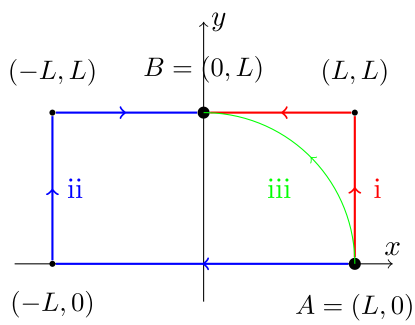
mit Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_i$ und auszunutzen, dass $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$. Alternativ kann man auch Komponentenweise rechnen.

2. Wegintegrale & Arbeit

(6 + 4 + (2) = 10 + (2) Punkte)

(a) Gegeben seien die zwei Kräfte

$$\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$



Berechnen Sie für beide Kräfte die Wegintegrale $\int_C \boldsymbol{F}_{a,b}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ entlang der Wege i, ii und iii in der xy-Ebene von $A = (L, 0, 0)$ nach $B = (0, L, 0)$. Berechnen Sie damit auch das Wegintegral entlang einer geschlossenen Kontur $\oint \boldsymbol{F}_{a,b}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$. Sind die Kräfte konservativ? Geben Sie ein Potential $V(x, y, z)$ mit $\boldsymbol{F} = -\nabla V(x, y, z)$ an, falls die Kraft konservativ ist.

(b) Sie fahren nun mit Ihrem Fahrrad von A nach B. Dabei fahren Sie mit einer konstanten Geschwindigkeit $|\dot{\boldsymbol{r}}| = v_0$ (Sie können natürlich so gut mit Ihrem Rad umgehen, dass Sie ohne Probleme und ohne Geschwindigkeitsverlust ums Eck fahren können). Während Ihrer Fahrt müssen Sie gegen die Reibungskraft

$$F_R = -\alpha\dot{\boldsymbol{r}} \tag{3}$$

arbeiten. Welche Arbeit haben Sie jeweils geleistet, wenn sie den Weg i bzw. ii genommen haben? Handelt es sich um eine konservative Kraft?

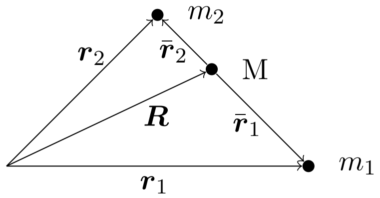
(c) *(Bonusaufgabe)* Wir wollen nun noch die (magnetische) *Lorentzkraft* F_b betrachten. Diese ist gegeben durch

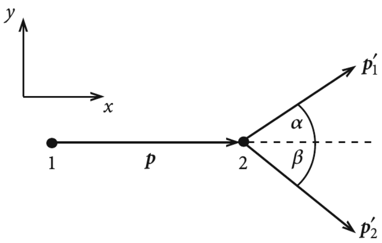
$$\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{r}(t)) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}(t), t). \tag{4}$$

Zeigen Sie

$$\oint \boldsymbol{F}_l \cdot d\boldsymbol{r} = 0. \tag{5}$$

3. Schwerpunktsystem & Stoßexperiment (1 + 1 + 3 + 1 + (2) = 6 + (2) Punkte)





Wir betrachten zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2 sowie Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ im Laborsystem. Auf die Teilchen wirke keine externe Kraft. Wir wollen die Koordinaten nun ins *Center-of-Mass*-System (CMS) (Schwerpunktsystem) transformieren. Das CMS wird häufig zum Beschreiben von Stoß- bzw. Streuprozessen verwendet, da die Rechnungen einfacher sind als im Laborsystem. Der *Schwerpunkt* eines Systems von zwei Teilchen mit Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ ist definiert als

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{M}. \tag{6}$$

Im CMS wird der Schwerpunkt als Ursprung des Koordinatensystems gewählt, das CMS bewegt sich also mit dem Schwerpunkt der Teilchen.

(a) Zeigen Sie, dass der Gesamtimpuls der zwei Teilchen im Laborsystem dem Impuls des Masseschwerpunktes entspricht, dass also

$$\boldsymbol{P} = m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 = M\dot{\boldsymbol{R}} \tag{7}$$

(b) Drücken Sie die Ortsvektoren $\bar{\boldsymbol{r}}_i$ im Schwerpunktsystem durch die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ im Laborsystem sowie $\boldsymbol{R}$ aus (siehe Skizze). Berechnen Sie damit den Gesamtimpuls der beiden Teilchen im CMS

$$\bar{\boldsymbol{P}} = m_1\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_1 + m_2\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_1 \tag{8}$$

(c) Teilchen 1 mit Impuls $\boldsymbol{p}$ stoße elastisch auf das im Laborsystem ruhendes Teilchen 2. Nach dem Stoß fliegen die Teilchen mit den Impulsen $\boldsymbol{p}_1'$ und $\boldsymbol{p}_2'$ unter den Winkeln α und β zur Impulsrichtung $\boldsymbol{p}$ weiter und werden detektiert. Leiten Sie den Winkel β in Abhängigkeit vom Winkel α und der Massen m_1 und m_2 her.

(d) Wie groß ist β in Abhängigkeit von α bei gleichen Massen $m_1 = m_2$?

(e) *(Bonusaufgabe)* Welche Impulse haben die Teilchen vor und nach dem Stoß im CMS? Skizzieren Sie die Anfangs- und Endzustände im CMS.

4. Bonusaufgabe: Stoke'scher Integralsatz ((4) Punkte)

Verifizieren Sie den Stoke'schen Integralsatz

$$\oint_{\partial A} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_A (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{9}$$

für das Feld $\boldsymbol{F} = (-y, x, 0)^\intercal$. Die Fläche A sei ein Kreis in der xy-Ebene und wird von der geschlossenen Kurve ∂A umrandet. *Hinweis:* Das Oberflächenelemen $d\boldsymbol{S}$ ist in diesem Fall durch $\boldsymbol{e}_z\, dx\, dy$ gegeben, da $\boldsymbol{e}_z$ senkrecht auf A steht.