Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Blatt 09 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20 + (12) Punkte
Besprechung 15.01.2016

Abgabe bis spätestens 13.01.2016

1. Drude-Leitfähigkeit

$(2 + 2 + 3 + (2 + 4) = 7 + (6)$ Punkte)

Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Elektrons mit Masse m und Ladung e, das sich unter Einfluss eines elektrischen Feldes $E(t)$ bewegt, kann durch die folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$\dot{v}(t) + \frac{v(t)}{\tau} = \frac{e}{m}E(t). \tag{1}$$

Hierbei ist τ die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen des Elektrons an Störstellen im Metall. Die *Stromdichte* ist definiert als $j(t) = env(t)$, wobei n die konstante Elektronendichte ist.

(a) Nutzen Sie Ihre Ergebnisse für die Green'sche Funktion $G(t)$ aus Aufgabe 2, Blatt 08, um eine partikuläre Lösung für $j(t)$ zu finden. Schreiben Sie $j(t)$ in der Form

$$j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sigma(t - t')E(t'), \tag{2}$$

und finden Sie den Ausdruck für die Leitfähigkeit $\sigma(t)$ des Metalls.

(b) Zeigen Sie, dass Gleichung (2) mittels Fouriertransformation in die Drude-Formel $\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega)\tilde{E}(\omega)$ übergeht (*Hinweis:* Das Faltungstheorem erweist sich hier als nützlich). Wie lautet $\tilde{\sigma}(\omega)$?

(c) Wir wollen die DGL (1) nun direkt mittels Fourier-Transformation lösen und damit $\tilde{\sigma}(\omega)$ bestimmen (dieses Verfahren lässt sich häufig zum Lösen linearer Differentialgleichungen anwenden und ist daher wichtig!). Setzen Sie die inversen Fouriertransformationen

$$v(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{v}(\omega)e^{i\omega t}, \quad E(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{E}(\omega)e^{i\omega t} \tag{3}$$

für $v(t)$ und $E(t)$ direkt in Gleichung (1) ein. Sie finden eine Gleichung der Form

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\, f(\omega)e^{i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, g(\omega)e^{i\omega t}. \tag{4}$$

Damit dies für alle Zeiten t erfüllt werden kann, muss $f(\omega) = g(\omega)$ gelten. Nutzen Sie dies um $\tilde{v}(\omega)$ und damit $\tilde{j}(\omega)$ und $\tilde{\sigma}(\omega)$ zu berechnen. Sie sollten Ihr Ergebnis aus Aufgabe b) erhalten.

(d) *Bonusaufgabe:* Setzen Sie $E(t) = \frac{m}{e}\delta(t)$ und bestimmen Sie damit die fouriertransformierte Green'sche Funktion $\tilde{G}(\omega)$.

(e) *Bonusaufgabe:* Bestimmen Sie nun die Gleichstromleitfähigkeit $\sigma_0 = \lim_{\omega\to 0}\tilde{\sigma}(\omega)$. Berechnen Sie außerdem den Gleichstrom j_0, d.h. den (zeitlich konstanten) Wert, den $j(t)$ im Falle eines konstanten elektrischen Feldes $E(t) = E_0$ annimmt. Verwenden Sie dazu zwei unterschiedliche Herangehensweisen und vergleichen Sie die Ergebnisse:

(i) Nutzen Sie direkt Gleichung (2)

(ii) Nutzen Sie die Formel aus Aufgabe (c), berechnen Sie $\tilde{E}(\omega)$ und damit $\tilde{j}(\omega)$. Berechnen Sie daraus $j(t)$ mittels inverser Fourier-Transformation.

2. Potenziale, Gradient und Kraftfelder (2 + 1 + 1 + (2) = 4 + (2) Punkte)

Es sei $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)^\intercal$ der Ortsvektor und $r = |\boldsymbol{r}|$ sein Betrag. Wir betrachten eine potenzielle Energie (Potenzial) der Form

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}, \tag{5}$$

welches beispielsweise die Gravitation ($\alpha = mMG$) oder die Kraft zwischen zwei elektrischen Punktladungen ($\alpha = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$) beschreibt. Es sei weiter $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^\intercal$ der Nabla-Operator.

(a) $f(r)$ sei eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $f'(r)$. Berechnen Sie

(i) $\frac{\partial}{\partial x_i} r$ (ii) ∇r (iii) $\frac{\partial}{\partial x_i} f(r)$ (iv) $\nabla f(r)$

(b) Berechnen Sie nun das Kraftfeld

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V(r),$$

welches vom Potenzial (5) erzeugt wird.

(c) Die Rückstellkraft eines harmonischen Oszillators sei $F = -kx_1$. Wie sieht das entsprechende Potenzial aus?

(d) *Bonusaufgabe:* Berechnen Sie die Kraft für das sogenannte *Yukawa*-Potenzial

$$V_\mathrm{Y}(r) = \frac{\alpha e^{-\gamma r}}{r}$$

3. Teilchen im quartischen Potenzial (1 + 1 + 1 + 2 + 4 + (4) = 9 + (4) Punkte)

Ein Teilchen der Masse m und Energie E bewege sich im Potenzial $V(x) = -ax^4 + bx^2$ mit $a, b > 0$. Für kleine Energien und kleine $|x|$ kennen wir die Lösung des Problems. Es ergibt sich mit $V(x) \approx bx^2$ der harmonische Oszillator, der bereits ausgiebig besprochen wurde.

(a) Skizzieren Sie das Potenzial $V(x)$.

(b) Berechnen Sie die beiden Hochpunkte $E_{max} = V(\pm|x_{max}|)$ des Potenzials.

(c) Wie lautet die Gleichung für die Energie des Teilchens?

(d) Lösen Sie die Gleichung aus c) nach $\dot{x}$ auf und stellen Sie das Integral für $x(t)$ auf. Integriert man die Bewegungsgleichung für allgemeine Energien, so erhält man ein elliptisches Integral. Stattdessen wollen wir hier einen Spezialfall betrachten.

(e) Sei nun die Energie des Teilchens $E = E_{max}$. Integrieren Sie die Bewegungsgleichung. Beachten Sie die beiden Fälle $|x| \leq |x_{max}|$ und $|x| > |x_{max}|$.

(f) *Bonusaufgabe:* Diskutieren Sie die drei Fälle $E < 0$, $0 < E < E_{max}$, $E_{max} < E$ anhand einer Skizze. Beachten Sie insbesondere welche der Fälle gebunden und welche ungebunden sind. Plotten Sie $\dot{x}(x)$ (Es gibt zwei Lösungen).