Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Blatt 07 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20 Punkte
Besprechung 11.12.2015

Abgabe jeweils bis spätestens Mittwoch 13:00 in den dafür vorgesehenen Kasten im Physik-Hochhaus.

1. Die Dirac'sche δ-Funktion (1.5 + 3 + 1.5 = 6 Punkte)

Die Dirac'sche δ-Funktion ist für $x_1 < x_2$ definiert durch die Eigenschaft

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x)\delta(x-x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{wenn } x_1 < x_0 < x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

für alle „genügend stetigen" *Testfunktionen* $f(x)$. Intuitiv gilt, dass $\delta(0) = \infty$ und $\delta(x \neq 0) = 0$. Formal handelt es sich nicht um eine Funktion, sondern um eine sogenannte *Distribution*, d.h. eine lineare Abbildung, die einer (Test-)Funktion (hier $f(x)$) eine Zahl (hier $f(x_0)$) zuordnet.

Im folgenden sei $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$.

(a) Berechnen Sie

$$\text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \cos(x)\delta(x), \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi} dx\, \sin(x)\delta(x-\pi/2), \qquad \text{(iii)} \int_{-\infty}^{0} dx\, \cos(x)\delta(x-\pi)$$

(b) Zeigen Sie durch Ihnen bekannte Integraltransformationsregeln, dass für eine differenzierbare Funktion $g(x)$ mit genau einer (einfachen) Nullstelle x_i im Intervall $x_1 < 0 < x_2$ und $g' \neq 0$

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i) \tag{2}$$

indem Sie zeigen, dass

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x)\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_i)|} f(x_i) \tag{3}$$

(c) Man kann auch Ableitungen der δ-Funktion definieren. Zeigen Sie, dass die Definition der ersten Ableitung der δ-Funktion (für differenzierbare $f(x)$)

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x)\delta'(x) = -f'(0) \tag{4}$$

formal mittels partieller Integration und den (intuitiven) Eigenschaften der δ-Funktion plausibel gemacht werden kann. Wie würden Sie demnach die 2. Ableitung $\delta''(x)$ definieren?

2. Darstellungen der δ-Funktion (3 + 3 = 6 Punkte)

Man kann die δ-Funktion als Grenzwert einer Funktionenfolge $\delta_\epsilon(x)$ darstellen:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x)\delta_\epsilon(x) = f(0), \tag{5}$$

Vorsicht: Die Grenzwertbildung ist nur zusammen mit dem Integral über eine Testfunktion sinnvoll!

(a) Ein Beispiel für eine solche Funktionenfolge ist gegeben durch die Rechteckfunktionen

$$\delta_{R,\epsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{für } |x| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6}$$

(i) Skizzieren Sie $\delta_{R,\epsilon}$ für verschiedene Werte von ϵ. Achten Sie vor allem auf Höhe und Breite der Funktion. Machen Sie anhand der Skizze plausibel, warum $\delta_{R,\epsilon}$ für $\epsilon \to 0$ die δ-Funktion ergibt.

(ii) Zeigen Sie Gleichung (5) für die Rechteckfunktionen (verwenden Sie dazu beispielsweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung).

(b) In der Vorlesung haben Sie bereits die Darstellung mittels Lorentzfunktionen kennengelernt:

$$\delta_{L,\epsilon}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} \tag{8}$$

ebenfalls eine Darstellung der δ-Funktion ist, indem Sie zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx-\epsilon|k|}, \tag{9}$$

die Lorentfunktionenfolge $\delta_{L,\epsilon}$ ergibt ($e^{-\epsilon|k|}$ bezeichnet man als „konvergenzerzeugenden Faktor“). Für $\epsilon \to 0$ erhält man also eine Darstellung der δ-Funktion.

3. Technoradio (1 + 3 + 1 + 3 (+2) = 8 (+2) Punkte)

Ein Radiosender spielt einen T-periodischen Technosong ab und sendet dabei mit einer Trägerfrequenz f_T. Auf diese Trägerfrequenz wird das Signal aufmoduliert. Die eingestrahlten Radiowellen induzieren eine oszillierende Spannung

$$V(t) = \sum_{n=-n_{max}}^{n_{max}} V_n(t) \quad \text{mit} \quad V_n(t) = V_{0,n}\cos\left[(\omega_T + n\omega)t + \alpha_n\right] \tag{10}$$

in der Antenne, wobei $\omega = 2\pi/T$, $\omega_T = 2\pi f_T$ und n_{max} die Bandbreite beschränkt. Die Antenne wirkt als Wechselspannungsquelle für einen LCR-Stromkreis, wobei L die Induktivität, C die Kapazität und R den Widerstand des Stromkreises bezeichnen. Das für den Empfänger wichtige Signal ist die Spannung $V_C(t) = Q(t)/C$, die über dem Kondensator C abfällt. Nehmen Sie an, dass $R \ll \omega_T L$ und $R \ll \sqrt{L/C}$.

(a) Bringen Sie die Differentialgleichung des LCR-Stromkreis für die Ladung Q auf dem Kondensator $L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + Q(t)/C = V(t)$ in die Form der Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) \tag{11}$$

eines getriebenen harmonischen Oszillators. Was sind x, γ, ω_0 und f als Funktionen von R, C, L, $V_{0,n}$ und der Ladung Q?

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 11. (Hinweis: Sie erhalten eine Linearkombination von $x_n(t)$.)

(c) Auf welchen Wert muss die Induktivität L eingestellt werden, damit der Stromkreis in Resonanz mit der Trägerfrequenz ω_T ist? Nehmen Sie an, dass der Widerstand R zu klein ist, um die Resonanzfrequenz wesentlich zu beinflussen.

(d) Welche frequenzabhängige Verstärkung $|x_n/(C\,V_{0,n})| = |\chi_n|/(LC) = |\chi(\omega_T + n\omega)|/(LC)$ erfahren die verschiedenen Komponenten des Signals? Wie groß darf die ,,Bandbreite” n_{max} maximal sein, sodass die Verstärkung um höchstens 1% im Vergleich zur maximalen Verstärkung abfällt?

(e) (Bonusaufgabe) Skizzieren Sie die freqenzabhängige Phasenverschiebung $\varphi_n = \varphi(\omega_T + \omega_n)$. Wie groß ist die maximale Phasenverschiebung für das vorher bestimmte n_{max}? (Am Besten entwickeln Sie $\tan(\varphi)$ um $\pi/2$)