Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Blatt 04 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20 Punkte
Besprechung 20.11.2015

Abgabe jeweils bis spätestens Mittwoch 13:00 in den dafür vorgesehenen Kasten im Physik-Hochhaus.

1. Fourierreihen (2 + 3 + 6 = 11 Punkte)

Wir betrachten komplexe Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die abschnittsweise stetig und *periodisch* mit Periode $T \in \mathbb{R}$ sind. Diese Funktionen können als Fourierreihen dargestellt werden, d.h.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \text{mit den Fourierkoeffizienten} \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f(t) e^{-in\omega t}, \tag{1}$$

wobei $\omega = 2\pi/T$.

(a) Leiten Sie eine vereinfachte Formel für die Fourierreihe für reelle Funktion $f(t) \in \mathbb{R}$ her. Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten $c_{-n} = c_n^*$ gilt und führen Sie die reellen Koeffizienten $a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n) = c_n + c_{-n}$ und $b_n = 2\,\mathrm{Im}(c_n) = i(c_{-n} - c_n)$ ein.

(b) Eine Funktion $f(t) = f_g(t) + f_u(t)$ kann in einen geraden $f_g(t)$ und einen ungeraden Anteil $f_u(t)$ zerlegt werden. Leiten Sie die vereinfachte Formel der Fourierreihe für die beiden folgenden Spezialfälle her:

   (i) Gerade Funktion $f(t) = f_g(t)$ und ungerade Funktion $f(t) = f_u(t)$.

   (ii) Reelle gerade Funktion $f(t) = f_g(t) \in \mathbb{R}$ und reelle ungerade Funktion $f(t) = f_u(t) \in \mathbb{R}$.

(c) Gegeben sind die auf ganz $\mathbb{R}$ definierten 2π-periodischen Funktionen

$$f_1(t) = \begin{cases} i & \text{für } 0 < t \le \pi \\ -i & \text{für } \pi < t \le 2\pi \end{cases}, \quad f_1(t + 2\pi) = f_1(t) \tag{2}$$

$$f_2(t) = t \quad \text{für } t \in [0, 2\pi], \quad f_2(t + 2\pi) = f_2(t) \tag{3}$$

$$f_3(t) = |\sin t| \tag{4}$$

   (i) Skizzieren Sie die drei Funktionen in getrennten Graphen.

   (ii) Berechnen Sie die Fourierreihen und Fourierkoeffizienten der Funktionen. Verwenden Sie die zuvor hergeleiteten Formeln.

   (iii) Fügen Sie zu Ihren Skizzen aus (i) jeweils Skizzen der endlichen Fourierreihen („trigonometrisches Polynom") N-ten Grades für $N = 1, 2$ und 4 hinzu (d.h. skizzieren Sie die Approximation $f_i(t) \approx \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t}$). Sie können auch ein Plotprogramm am PC (z.B. „gnuplot") verwenden.

2. Dragster mit Reibung (2 + 1 + 1 + 3 + 1 + 1 = 9 Punkte)

Wir betrachten erneut den Dragster aus Aufgabe 3, Blatt 3. Diesmal wollen wir allerdings den Luftwiderstand mit einbeziehen. Die restlichen Gegebenheiten ändern sich nicht, d.h. während des Beschleunigungsvorgangs erzeugt der Motor die Schubkraft F_0 und verbraucht Treibstoff, sodass die Masse gemäß $m(t) = m_D + m_{T,0}\,(1 - t/\tau)$ für $(0 \le t \le \tau)$ abnimmt.

(a) Der findige Dr. Stokes hat seinen Dragster mit illegalen (und unphysikalischen) Deturbulatoren ausgestattet, welche Luftverwirbelungen am Dragster verhindern. Zu Dr. Newtons Missfallen nehmen wir daher lineare Reibung für den Luftwiderstand (Stokes'sche Reibung) während des Beschleunigens an. Die Bewegungsgleichung für den Dragster lautet damit

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}v(t) + \alpha\, v(t) = F_0, \tag{5}$$

mit Reibungskoeffizient $\alpha > 0$. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $v(0) = 0$ und $0 \leq t \leq \tau$.

(b) Zeigen Sie, dass $v(t)$ für $\alpha = 0$ dem Ergebnis ohne Reibung (Aufgabe 3b, Blatt 3) entspricht.

(c) Bestimmen Sie $x(t)$ für den Beschleunigungsvorgang.

(d) Nachdem aller Treibstoff aufgebraucht ist, hat der Dragster die Geschwindigkeit $v(\tau) = v_\tau$ erreicht und der Bremsvorgang beginnt. Zusätzlich zu den gewöhnlichen Bremsen die eine konstante Bremskraft $-F_B$ ($F_B > 0$) erzeugen, muss ein Bremsfallschirm genutzt werden. In diesem Fall bemerkt Dr. Newton freudig, dass der Luftwiderstand quadratisch mit der Geschwindigkeit zunimmt. Damit finden wir

$$m_D\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma\,|v(t)|v(t) = -F_B \tag{6}$$

mit Reibungskoeffizient $\gamma > 0$. Lösen Sie diese Bewegungsgleichung für den Bremsvorgang, d.h. $v(t) \geq 0$, durch Separation der Variablen für $t \geq \tau$. Die Anfangsbedingung ist durch $v(\tau) = v_\tau$ gegeben.

Hinweis: Sie können folgende Formeln verwenden:

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)\ , \quad \arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$$

Wobei Arkustangens (geschrieben arctan oder auch $\tan^{-1}$) die Umkehrfunktion des Tangens (tan) ist.

(e) Berechnen Sie den Zeitpunkt t_{end}, bei dem der Dragster zum Stillstand kommt.

(f) Wir wollen nun noch den Grenzfall vernachlässigbarer Reibung betrachten. Bilden Sie $\lim_{\gamma\to 0} v(t)$ und überzeugen Sie sich von der Sinnhaftigkeit des erhaltenen Ergebnisses.

Tabelle 1: Das griechische Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ϵ, ε	Epsilon	P	ρ, ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ, ϑ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Iota	Φ	ϕ, φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega