KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK www.tfp.kit.edu

Blatt 03 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20 Punkte
Besprechung 13.11.2015

Abgabe jeweils bis spätestens Mittwoch 13:00 in den dafür vorgesehenen Kasten im Physik-Hochhaus.

1. Hyperbelfunktionen (1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)

Gegeben seien die Reihenentwicklungen der Hyperbelfunktionen ,,Sinus Hyperbolicus" und ,,Kosinus Hyperbolicus"

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{1}$$

Außerdem ist die Euler-Formel $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ bekannt, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Drücken Sie cosh, sinh, cos und sin durch Exponentialfunktionen aus. Verwenden Sie dazu die Reihendarstellung der Exponentialfunktion und die oben gegebenen Reihendarstellungen.

(b) Zeigen Sie *eine* der folgenden Identitäten mit Hilfe der Exponentialdarstellungen

$$\sin(ix) = i \sinh x, \quad \sinh(ix) = i \sin x, \quad \cos(ix) = \cosh x, \quad \cosh(ix) = \cos x$$

und begründen Sie die weiteren Identitäten.

(c) Zeigen Sie, dass sinh und cosh die Differentialgleichung $f'' = f$ erfüllen, sowie dass sin und cos die Differentialgleichung $f'' = -f$ erfüllen.

(d) Zeigen Sie $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ und $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(e) Zeigen Sie *eines* der Additionstheoreme

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \quad \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y,$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

und begründen Sie die weiteren.

2. Schiefer Wurf vom Turm (2 + 1 + 1 + 2 + 2 = 8 Punkte)

Sie stehen auf einem Turm in Höhe h und werfen einen Ball. Nehmen Sie an, dass der Ball widerstandsfrei fliegt.

(a) Berechnen Sie die Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ des Balls. Der Startpunkt sei $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, h)$. Sie werfen den Ball mit einer Geschwindigkeit $|\boldsymbol{v}(0)| = v_0$ unter einem Winkel α zur xy-Ebene in x-Richtung. Auf den Ball wirkt die konstante Erdbeschleunigung $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = (0, 0, -g)$. Die Integrationskonstanten folgen aus den Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$.

(b) Berechnen Sie den Zeitpunkt T_{max}, an dem der Ball den Scheitelpunkt der Kurve erreicht. Berechnen Sie dann die Höhe $z_{\text{max}} = z(T_{\text{max}})$ des Scheitelpunkts.

(c) Zu welchem Zeitpunkt T und in welchem Abstand $x(T)$ trifft der Ball am Boden auf?

(d) Zeigen Sie: Der zurückgelegte Weg des Balls (Bogenlänge) im Zeitraum $t \in [0, T_{\text{max}}]$ ist gegeben durch

$$L(T_{\text{max}}) = \frac{v_0^2}{2g} \left(\sin \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{arsinh}(\tan \alpha) \right). \tag{2}$$

Hinweis: Integrieren Sie $L(t) = \int_0^t |\boldsymbol{v}(\tau)| \mathrm{d}\tau$ mittels quadratischer Ergänzung und wählen Sie eine geeignete Substitution um das Integral auf $\int \cosh^2 \phi \, \mathrm{d}\phi$ zurückzuführen. Verfahren Sie ähnlich der Integration von Aufgabe 3c auf Blatt 1.

(e) Zeigen Sie: Der insgesamt zurückgelegte Weg $L(T)$ geht für $\alpha = \pi/2$ gegen $2z_{\max} - h$ und für $\alpha = -\pi/2$ gegen h. Zeigen Sie hierzu, dass folgende Grenzwerte verschwinden

$$\lim_{\alpha\to\pm\pi/2} \cos^2\alpha \, \mathrm{arsinh}(\tan\alpha) = 0\,. \tag{3}$$

3. Dragster (2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7 Punkte)

Wir betrachten einen Dragster-Rennwagen mit Gesamtmasse $m(t) = m_D + m_T(t)$ wobei m_D die konstante Masse des Autos und $m_T(t)$ die Masse des getankten Nitromethantreibstoffes ist. Beim Beschleunigen verbrennt der Motor Treibstoff mit einer konstanten Rate und erzeugt damit eine konstante Schubkraft F_0. Für die Masse des Treibstoffs gilt dann $m_T(t) = m_{T,0}\,(1 - t/\tau)$ für $0 \leq t \leq \tau$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ steht der Dragster an der Startlinie bei $x(0) = 0$ und beginnt zu beschleunigen.

Vernachlässigen Sie in der folgenden Aufgabe jegliche Form der Reibung.

(a) Finden Sie mit Hilfe des zweiten Newton'schen Gesetzes $\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = F$ die Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit $v(t)$ des Dragsters.
Bringen Sie diese auf die Form

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu + v(t)}{\tau' - t} \tag{4}$$

und bestimmen Sie μ und τ'.

(b) Bestimmen Sie $v(t)$ für $0 \leq t \leq \tau$ mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0$. Nutzen Sie dazu Gleichung (4) und die Methode der Separation der Variablen.

(c) Welche Endgeschwindigkeit erreicht der Dragster nachdem aller Treibstoff aufgebraucht wurde?

(d) Zeigen Sie, dass die zurückgelegt Strecke $x(t)$ für die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ im Zeitraum $0 \leq t \leq \tau$ gegeben ist durch

$$x(t) = -\mu\left[t + \tau' \ln(1 - t/\tau')\right]\,. \tag{5}$$

Bestimmen Sie außerdem $x(t)$ für $t > \tau$.

(e) Entwickeln Sie $x(t)$ für kleine Zeiten $t < \tau < \tau'$ bis zur führenden Ordnung in t (d.h. bis zum ersten nichtverschwindende Term mit t Abhängigkeit). Interpretieren Sie das Ergebnis.