KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK www.tfp.kit.edu

Blatt 02 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20 Punkte
Besprechung 06.11.2015

Abgabe jeweils bis spätestens Mittwoch 13:00 in den dafür vorgesehenen Kasten im Physik-Hochhaus.

1. Komplexe Zahlen

$(3 + 1,5 + 2 + 1,5 + 1 = 9$ Punkte)

(a) Gegeben sei $z = 1 + i$. Berechnen und zeichnen Sie die folgenden Größen in der komplexen Zahlenebene: $2z$, iz, $z + (3 - 2i)$, z^3, $\bar{z} = z^*$, $z/|z|$.

(b) Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ in die Form $z = a + ib$ und $z = |z|e^{i\phi}$

$$(1+i)\cdot(2+2i)\,, \quad (\sqrt{3}+i)/(1-i)\,, \quad i^3(1-i)^3\,,$$

(c) Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen $z^n = 1$ und $z^n = i$. Zeichnen Sie die Lösungen für $n = 3, 4$ in der komplexen Zahlenebene.

(d) Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene ($\{z \in \mathbb{C}||z| < 2\}$ bedeutet “alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 2$“)

$$\{z \in \mathbb{C}||z| < 2\}\,, \quad \{z \in \mathbb{C}|\arg z = \pi/3\}\,, \quad \{z \in \mathbb{C}|\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1\}$$

(e) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorreihe die Euler–Formel

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi).$$

2. Taylor-Entwicklung

$(2 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 = 11$ Punkte)

In der Physik wird man häufig mit komplizierten Funktionen konfrontiert, deren Verhalten nicht klar ersichtlich ist und mit denen sich nur schwer weiter rechnen lässt. Hier ist man darauf angewiesen, die Funktion geeignet zu nähern. Ist f eine glatte Funktion können wir sie in der Nähe des Punktes x_0 durch eine Taylor-Entwicklung N-ter Ordnung mit Entwicklungsstelle x_0 approximieren. Diese ist definiert als

$$f(x) \approx \mathrm{T}_N f(x;x_0) + \mathcal{O}\left((x-x_0)^{N+1}\right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \mathcal{O}((x-x_0)^{N+1}).$$

Hier ist $f^{(k)}(x_0)$ die k-te Ableitung von f an der Stelle x_0 und $\mathcal{O}\left((x-x_0)^{N+1}\right)$ bedeutet, dass die weiteren Terme von der Ordnung $(x-x_0)^{N+1}$, also kleiner als die ausgeschriebenen sind, und daher vernachlässigt werden sollen. Die Approximation ist demnach desto besser je kleiner $|x - x_0|$ ist. $T_N f(x;x_0)$ ist das Taylor-Polynom N-ter Ordnung.

(a) Gegeben sei nun die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$. Wir wollen das Verhalten dieser Funktion um den Punkt $x_0 = 0$ betrachten.

(i) Skizzieren Sie $f(x)$ im Intervall $x \in [-0.5, 0.5]$

(ii) Bestimmen Sie $g_1(x) = T_1 f(x;0)$ und $g_2(x) = T_2 f(x;0)$ und fügen Sie Skizzen der beiden Funktionen zu Ihrer vorherigen Skizze hinzu. Untersuchen Sie, wie sich die Genauigkeit der Näherung mit höherer Ordnung der Taylor-Entwicklung ändert, indem Sie jeweils den relativen Fehler $r_{1,2} = |[g_{1,2}(x) - f(x)]\,/f(x)|$ im selben Intervall skizzieren.

(b) Berechnen Sie zu den folgenden Funktionen jeweils die ersten zwei nicht verschwindenden Terme der Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$ und skizzieren die Funktionen mit der jeweiligen Näherung im Intervall $x \in [0, 0.5]$.

$$\text{(i)} \quad f_1(x) = \frac{\sin(x)}{1+x} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(c) Berechnen Sie die ersten zwei nicht verschwindenden Terme der Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$ von

$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}y^2} \mathrm{d}y$$

(d) Das folgende Integral mit $0 < k < 1$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2(\sin\vartheta)^2}} \mathrm{d}\vartheta.$$

lässt sich nicht elementar berechnen. Die Mathematiker des 19. Jahrhundert haben aber die Eigenschaften dieses Integrals (und vieler anderer) untersucht und ihm einen Namen gegeben, nämlich vollständiges elliptisches Integral 1. Art. Wir können mit Hilfe der Taylor-Entwicklung eine Potenzreihenentwicklung für $K(k)$ erhalten.

Entwickeln Sie den Integranden in $x = k\sin\vartheta$ bis zur 2. Ordnung (Sie können Ihr Ergebnis aus (b) verwenden).

Berechnen Sie nun das Integral für den genäherten Integranden. Damit erhalten Sie eine Näherung für $K(k)$. Bestimmen Sie mit dieser $K(0,1)$ und $K(0,8)$. Numerisch erhält man für das exakte Integral $K(0,1) \approx 1,57475 \approx 0,501257\pi$ und $K(0,8) \approx 1,9953 \approx 0,635125\pi$.

(e) Mit $\mathrm{T}_\infty f(x;x_0)$ bezeichnen wir die unendliche Taylor-Reihe von f um x_0. Zeigen Sie: Ist f in x_0 durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

so gilt $f(x) = \mathrm{T}_\infty f(x;x_0)$, d.h. $f^{(N)}(x_0) = N! \cdot a_N$. Die Taylor-Reihe ist also in diesem Fall exakt.

(f) Berechnen Sie nun noch einige weitere Terme der Taylor-Entwicklung von $f(x)$ aus Aufgabe (a) und stellen Sie eine Vermutung für die vollständige Reihenentwicklung $T_\infty f(x;0)$ auf. Sie müssen Ihre Vermutung nicht beweisen.