Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Blatt 01 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20 Punkte
Besprechung 30.10.2015

Abgabe jeweils bis spätestens Mittwoch 13:00 in den dafür vorgesehenen Kasten im Physik-Hochhaus.

1. Levi-Civita-Tensor

$(1+1+1+1+1+1=6$ Punkte)

Der Levi-Civita-Tensor ϵ wird auch Permutationssymbol genannt und gibt an, ob eine Permutation gerade oder ungerade ist.

$$\epsilon_{i_1\dots i_n} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i_1,\dots,i_n) \text{ gerade Permutation,} \\ -1 & \text{falls } (i_1,\dots,i_n) \text{ ungerade Permutation,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Verwenden Sie bei dieser Aufgabe die Einsteinsche Summenkonvention und das Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Vektoren gilt $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ und $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$.

(b) Beweisen Sie $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \epsilon_{ijk}a_ib_jc_k$.

(c) Beweisen Sie die Identität $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

(d) Beweisen Sie die "bac-cab"-Formel $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

(e) Die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kann über den Levi-Civita-Tensor definiert werden $\det A = \epsilon_{i_1\dots i_n}A_{1,i_1}A_{2,i_2}\dots A_{n,i_n}$. Zeigen Sie, $\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

(f) Zeigen Sie für $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dass die Determinante multiplikativ ist, d.h., $\det(AB) = \det A \det B$.

2. Die Gammafunktion

$(1+2+2+1=6$ Punkte)

In dieser Aufgabe werden Sie Schritt für Schritt zeigen, dass die folgende Relation für die Gammafunktion gilt:

$$\Gamma(n+1) := \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n! \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

wobei $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot(\cdots)\cdot(n-1)\cdot n$ für $n>0$ die Fakultät der natürlichen Zahl n bezeichnet und $0! = 1$ gilt.

(a) Um $\Gamma(n+1)$ zu bestimmen wollen wir ausnutzen, dass $e^{-x} = e^{-\lambda x}\big|_{\lambda=1}$. Führen Sie daher zunächst einen Parameter λ ein und definieren Sie die Folge

$$f_n(\lambda) := \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Wie hängt $f_n(\lambda)$ mit Γ zusammen? Bilden Sie nun die erste Ableitung $f_n'(\lambda) = \frac{\mathrm{d}f_n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$ und finden Sie einen Zusammenhang zwischen dieser Ableitung und dem nächsten Folgenglied $f_{n+1}(\lambda)$. (*Hinweis:* Da der Integrand stetig nach λ differenzierbar ist, kann man Integration und Differentiation vertauschen)

(b) Berechnen Sie $f_0(\lambda)$ explizit mit Gleichung (2). Berechnen Sie nun einige weitere Folgenglieder $f_1(\lambda)$ bis mindestens $f_3(\lambda)$. Dies gelingt am einfachsten mit Hilfe des in Aufgabenteil (a) hergeleiteten Zusammenhanges. Stellen Sie eine Vermutung für das allgemeine Folgenglied $f_n(\lambda)$ auf.

(c) Beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.

(d) Nutzen Sie (a) – (c) um Gleichung (1) zu zeigen.

Bemerkung: In Aufgabe (b) können Sie auch Gleichung (2) nutzen um die weiteren Glieder zu berechnen, der Rechenaufwand ist aber erheblich größer.

3. Flugnavigation (1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 = 8 Punkte)

Nachdem Sie bei einem entspannten Flug in Ihrem Motorflugzeug die Umgebung von Karlsruhe erkundet haben, befinden Sie sich nun auf einer Flughöhe von z_0 direkt über dem Schloss in Karlsruhe. Um in den Landeanflug auf Baden-Airpark übergehen zu können, müssen Sie zuerst auf $z_1 < z_0$ absinken. Dazu steuern Sie zur Zeit $t = 0$ in eine Flugbahn, die folgendermaßen beschrieben werden kann:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\omega t) \\ r\cos(\omega t) \\ z_0 - \alpha t \end{pmatrix}$$

wobei $\alpha > 0$ die Sinkrate ist. Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass $\hat{e}_y$ genau nach Norden zeigt.

(a) Skizzieren Sie Ihre Flugbahn.

(b) Berechnen Sie Ihre Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}$ und Ihre Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$ sowie jeweils deren Betrag $v(t) = |\boldsymbol{v}(t)|$ und $a(t) = |\boldsymbol{a}(t)|$. Was fällt Ihnen beim Betrag der Geschwindigkeit auf? Wieso ist Ihre Beschleunigung trotzdem nicht $a = 0$?

(c) Berechnen Sie die zurückgelegte Strecke $s(t)$ mittels der *Bogenlänge*

$$s(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t')}{\mathrm{d}t'} \right| = \int_0^t \mathrm{d}t' \, |\boldsymbol{v}(t')|$$

Wie können Sie die zurückgelegte Strecke geometrisch berechnen?

(d) Am nächsten Tag befinden Sie sich erneut auf einer Höhe von z_0 über dem Karlsruher Schloss. Da Sie es heute allerdings eilig haben, beschließen Sie mit einer höheren Rate α_2 zu sinken. Die entsprechende Bahnkurve lässt sich folgendermaßen beschreiben:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} r\sin\left(At^2/2\right) \\ r\cos\left(At^2/2\right) \\ z_0 - \alpha_2 t \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie erneut $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{a}(t)$, $|\boldsymbol{v}(t)|$ und $|\boldsymbol{a}(t)|$. Was hat sich im Vergleich zu Aufgabe (b) geändert?

(e) Berechnen Sie die zurückgelegte Strecke $s(t)$ mit Hilfe der Bogenlänge!
(*Hinweis:* Das Integral $\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$ lässt sich mittels der Substitution $x = \sinh(u)$, wobei sinh den 'Sinus Hyperbolicus' bezeichnet, und anschließender PI lösen, +1 Bonuspunkt)

(f) Nach dem Sinkflug fliegen Sie nun mit der Geschwindigkeit $v = 150\,\mathrm{km/h}$. Auf Kurs 220° befindet sich ihr Zielflughafen Baden-Airpark in einer Entfernung von 35 km. Dem Wetterbericht haben Sie entnommen, dass Wind mit 50 km/h aus westlicher Richtung kommt. Welchen Kurs müssen Sie wählen? Wie lange benötigen Sie für den Flug? Welche Geschwindigkeit über Grund haben Sie?