Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Lösung – Übungsklausur 1 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön **40 Punkte**
Sebastian Zanker, Daniel Mendler **Karlsruhe, 17.12.2015**

---

1. Aufwärmübung (2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte)

(a)

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - 2 + 2 = 0 \tag{1}$$

Die Vektoren sind demnach senkrecht zueinander und schießen einen Winkel von 90 ein.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2 \\ 0 - 1 \\ -1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(b) Für das erste Integral finden wir

$$I_1 = \int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x$$

Das zweite Integral ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
&I_2 = \int \sqrt{1 - x^2}, \qquad x = \sin u \Rightarrow dx = \cos u \, du \\
&\Rightarrow I_2 = \int du \, \cos^2 u \\
&= \sin u \cos u + \int du \, \sin^2 u = \sin u \cos u + \int du \, (1 - \cos^2 u) \\
&\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} (\sin u \cos u + u) \qquad u = \arcsin x \\
&\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x \right)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
z_1 &= i^2 (1 + i) = -1(1 + i) = -1 - i \\
z_2 &= 2e^{i\pi} = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= (ct \cos \omega t, ct \sin \omega t)^\intercal \\
\boldsymbol{v}(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}(t) = c(\cos \omega t, \sin \omega t)^\intercal + c\omega t(-\sin \omega t, \cos \omega t)^\intercal \\
\boldsymbol{a}(t) &= \dot{\boldsymbol{v}}(t) = 2c\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t)^\intercal - c\omega^2 t(\cos \omega t, \sin \omega t)^\intercal
\end{aligned}$$

(e)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x - a)\delta(x) \, dx = \begin{cases} f(-a), & \text{für } x_0 < 0 < x_1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Harmonischer Oszillator (3 + 2 + 2 + 2 + 1 = 10 Punkte)

(a)

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0 \tag{3}$$

Einsetzen des Ansatzes $e^{\lambda t}$ liefert

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{4}$$

$$\lambda = \frac{-a}{2} \pm i\sqrt{b - a^2/4} = -\frac{a}{2} \pm i\Omega \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet dann

$$x(t) = e^{-a/2t}(Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}) \tag{6}$$

(b)

$$x(t) = e^{-a/2t}(\tilde{A}\cos(\Omega t) + \tilde{B}\sin(\Omega t)) \tag{7}$$

$$\tilde{A} = (A + B)/2 \quad \tilde{B} = (A - B)/2 \tag{8}$$

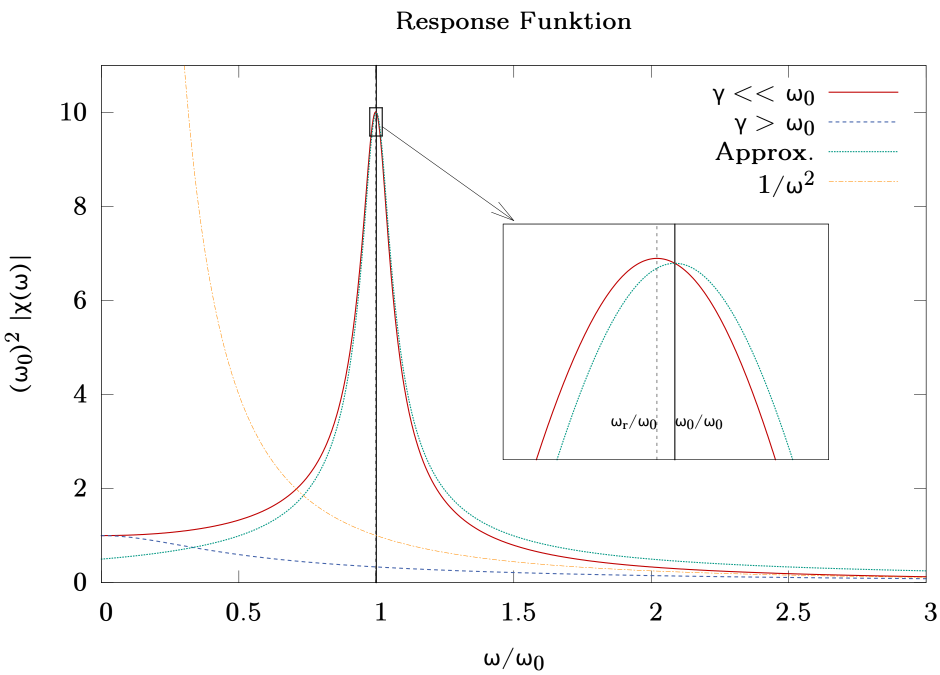
(c)

$$x_p(t) = c|\chi(\omega)|\sin(\omega t + \varphi(\omega)) \tag{9}$$

$$|\chi(\omega)|^2 = \frac{1}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2} \tag{10}$$

$$\tan[\varphi(\omega)] = \frac{a\omega}{\omega^2 - b}. \tag{11}$$

(d) Skizze der Resonanzkurve

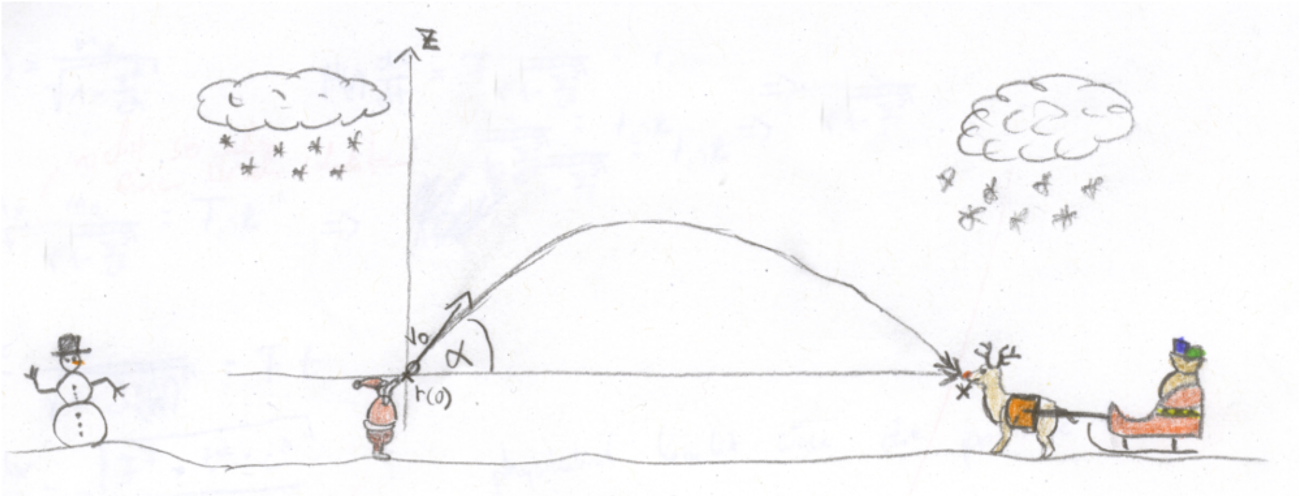


(e)

$$x_p(t) = c|\chi(\omega)|\sin(\omega t + \varphi(\omega)) + c_2|\chi(\omega_2)|\cos(\omega_2 t + \varphi(\omega_2)) \tag{12}$$

3. Weiße Weihnachten

(3 + 2 + 2 + 3 = 10 Punkte)



Vielen Dank an Lars für die Skizze!

(a) Wir berechnen die Bahnkurve. Die konstante Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{r}} = (0, 0, -g)$, die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (v_0 \cos\alpha, 0, v_0 \sin\alpha)$ sowie der Abwurfpunkt $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, 0)$ sind als Anfangsbedingungen vorgegeben.

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}}(t) &= \ddot{\boldsymbol{r}} = (0, 0, -g) \\
\dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \int_0^t \ddot{\boldsymbol{r}}(t)\mathrm{d}t + \dot{\boldsymbol{r}}(0) = (0, 0, -gt) + \dot{\boldsymbol{r}}(0) = (v_0 \cos\alpha, 0, v_0 \sin\alpha - gt) \\
\boldsymbol{r}(t) &= \int_0^t \dot{\boldsymbol{r}}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{r}(0) = (v_0 t \cos\alpha, 0, v_0 t \sin\alpha - gt^2/2)
\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen den Zeitpunkt des Auftreffens, wobei $z(T) = 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
z(T) &= -g\frac{T^2}{2} + v_0 T \sin\alpha = 0 \\
\Leftrightarrow \frac{T^2}{2} &- \frac{v_0 \sin\alpha}{g} T = 0 \\
\Longrightarrow T_{1,2} &= 0, \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung ist $T_2 > 0$. Einsetzen liefert

$$x(T) = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} \tag{13}$$

(c)

$$L(t) = \int_0^t |\boldsymbol{v}(t')|\mathrm{d}t' = \int_0^t \sqrt{\boldsymbol{v}(t')^2}\mathrm{d}t' = \int_0^t \mathrm{d}t' \sqrt{g^2 t'^2 - 2gt' v_0 \sin\alpha + v_0^2} \tag{14}$$

$$= g \int_0^t \mathrm{d}t' \sqrt{t'^2 - 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g} t' + \frac{v_0^2}{g^2}} \tag{15}$$

Wir rechnen weiter mit $a = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ und $b = \frac{v_0^2}{g^2}$

$$L(t) = g \int_0^t \mathrm{d}t' \sqrt{t'^2 - 2at' + b} = g \int_0^t \mathrm{d}t' \sqrt{(t' - a)^2 + (b - a^2)} \tag{16}$$

$$= g\sqrt{b - a^2} \int_0^t \mathrm{d}t' \sqrt{1 + \frac{(t' - a)^2}{b - a^2}} \tag{17}$$

Nun substituieren wir (für $t' < a$)

$$q'(t') = \frac{a - t'}{\sqrt{b - a^2}} \tag{18}$$
$$-\sqrt{b - a^2}\,\mathrm{d}q' = \mathrm{d}t' \tag{19}$$
$$q(0) = \frac{a}{\sqrt{b - a^2}} = \tan\alpha \tag{20}$$
$$q(t) = \tan\alpha - \frac{gt}{v_0\cos\alpha} \tag{21}$$

und erhalten

$$L(t) = -g(b - a^2)\int_{q(0)}^{q(t)} \mathrm{d}q'\sqrt{1 + q'^2} = -\frac{v_0^2}{g}\cos^2\alpha \int_{q(0)}^{q(t)} \mathrm{d}q'\sqrt{1 + q'^2} \tag{22}$$

(d) Substitution mit $\sinh u = q'$ liefert

$$L(t) = -\frac{v_0^2}{g}\cos^2\alpha \int_{u(0)}^{u(t)} \mathrm{d}u' \cosh^2 u' = -\frac{v_0^2}{2g}\cos^2\alpha \cdot \left[\sinh u' \cosh u' + u'\right]_{u(0)}^{u(t)}. \tag{23}$$

Einsetzen von $T/2$ liefert den zurückgelegten Weg

$$u(0) = \operatorname{arsinh} q(0) = \operatorname{arsinh}(\tan\alpha) \tag{24}$$
$$\sinh u(0) = \tan\alpha \tag{25}$$
$$\cosh u(0) = \sqrt{1 + \tan^2\alpha} \tag{26}$$
$$\tag{27}$$
$$u(T/2) = \operatorname{arsinh} q(T/2) = \operatorname{arsinh}(\tan\alpha - \tan\alpha) = 0 \tag{28}$$
$$\sinh u(T/2) = 0 \tag{29}$$
$$\cosh u(T/2) = 1 \tag{30}$$
$$\tag{31}$$
$$L(T) = 2L(T/2) = \frac{v_0^2}{g}\big(\sin\alpha + \cos^2 \operatorname{arsinh}(\tan\alpha)\big) \tag{32}$$

4. Linearbeschleuniger (2 + 3 + 3 + 2 = 10 Punkte)

Mit dieser Aufgabekann beispielsweise ein Elektron in einem Linearbeschleuniger beschrieben werden. Da das Elektron hier sehr hohe Geschwindigkeiten $v \approx c$ erreicht, kann man nicht mehr klassisch rechnen sondern muss die relativistische Massezunahme berücksichtigen.

Die Bewegungsgleichung lautet $\dot{p} = F$. Da $F = const.$ können wir diese direkt integrieren und erhalten

$$\int_{p_0}^{p} dp' = \int_0^t F\,dt' \tag{33}$$
$$\Rightarrow \quad p = Ft + p_0 \tag{34}$$

Setzen wir nun noch $p = m(v)v$ ein erhalten wir die DGL (in der Klausur ist $p_0 = 0$)

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Ft + p_0. \tag{35}$$

(a) Um die Gleichung nach v aufzulösen multiplizieren wir mit dem Nenner durch und quadrieren die Gleichung. Damit finden wir

$$m_0^2 v^2 = (1 - v^2/c^2)(Ft)^2 \tag{36}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{Ft}{\sqrt{m_0^2c^2 + (Ft)^2}} = \pm\frac{\frac{Ft}{m_0 c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} \tag{37}$$

Da für $F > 0$ die Geschwindigkeit zunehmen muss, ist die negative Lösung mit „$-$“ unphysikalisch und es bleibt nur die positive Lösung übrig. (0.5 Puntke)

(b) Mit Gleichung (37) finden wir

$$\frac{1}{c}\,dx = \frac{Ft}{\sqrt{m_0^2c^2+(Ft)^2}}\,dt \tag{38}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_0^t dt'\,\frac{Ft'}{\sqrt{m_0^2c^2+(Ft')^2}} \tag{39}$$

Wie im Hinweis der Aufgabe vorgeschlagen substituieren wir im rechten Integral

$$\tau = (Ft')^2 \quad \Rightarrow \quad d\tau = 2F(Ft')dt' \tag{40}$$

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(t) = (Ft)^2 \tag{41}$$

Einsetzen liefert

$$\frac{x(t)-x_0}{c} = \int_{\tau(0)}^{\tau(t)} d\tau\,\frac{Ft'}{2F(Ft')}\frac{1}{\sqrt{m_0^2c^2+\tau}} = \frac{1}{2F}\int_{\tau(0)}^{\tau(t)} d\tau\,\frac{1}{\sqrt{m_0^2c^2+\tau}} \tag{42}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{c}{F}\left[\sqrt{m_0^2c^2+\tau}\right]_{\tau(0)}^{\tau(t)} + x_0 \tag{43}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{c}{F}\left(\sqrt{m_0^2c^2+(Ft)^2} - m_0c\right) + x_0 = \frac{m_0c^2}{F}\left(\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2} - 1\right) + x_0 \tag{44}$$

(c) Wir betrachten nun das asymptotische Verhalten für große und kleine Zeiten.

(i) Um das asymptotische Verhalten für kleine Zeiten zu bestimmen, entwickeln wir $v(t)$ bis zur ersten Ordnung in t. Dazu berechnen wir die erste Ableitung

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F}{\sqrt{m_0^2c^2+(Ft)^2}} - \frac{F(Ft)^2}{(m_0^2c^2+(Ft)^2)^{3/2}} \tag{45}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{F}{m_0} \tag{46}$$

mit

$$v(0) = 0 \tag{47}$$

finden wir

$$v(t) \approx \frac{Ft}{m_0} \tag{48}$$

(ii) Für große Zeiten $t \to \infty$ können wir m_0c gegenüber Ft vernachlässigen und erhalten

$$\frac{v(t\to\infty)}{c} = \frac{Ft}{|Ft|} = \mathrm{sign}(F) = 1 \quad \text{(1 Punkt)} \tag{49}$$

Für große Zeiten nimmt v also asymptotisch den Wert der Lichtgeschwindigkeit an.

(d) Für $x_0 = 0$ haben wir

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{Ft}{m_0c}}{\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2}} = \frac{ut}{\sqrt{1+u^2t^2}} \tag{50}$$

$$\frac{v(t\approx 0)}{c} = \frac{Ft}{m_0c} = ut \quad \Rightarrow \quad x(t\approx 0) = \frac{1}{2}ut^2 \tag{51}$$

$$\frac{v(t\to\infty)}{c} = 1 \quad \Rightarrow \quad x(t\to\infty) \propto ct \tag{52}$$

$$x(t) = \frac{c}{F}\left(\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2} - m_0c\right) = \frac{c}{u}\left(\sqrt{1+u^2t^2}-1\right) \quad \Rightarrow \quad x(t\to\infty) \approx \frac{c}{u}(ut-1) \tag{53}$$

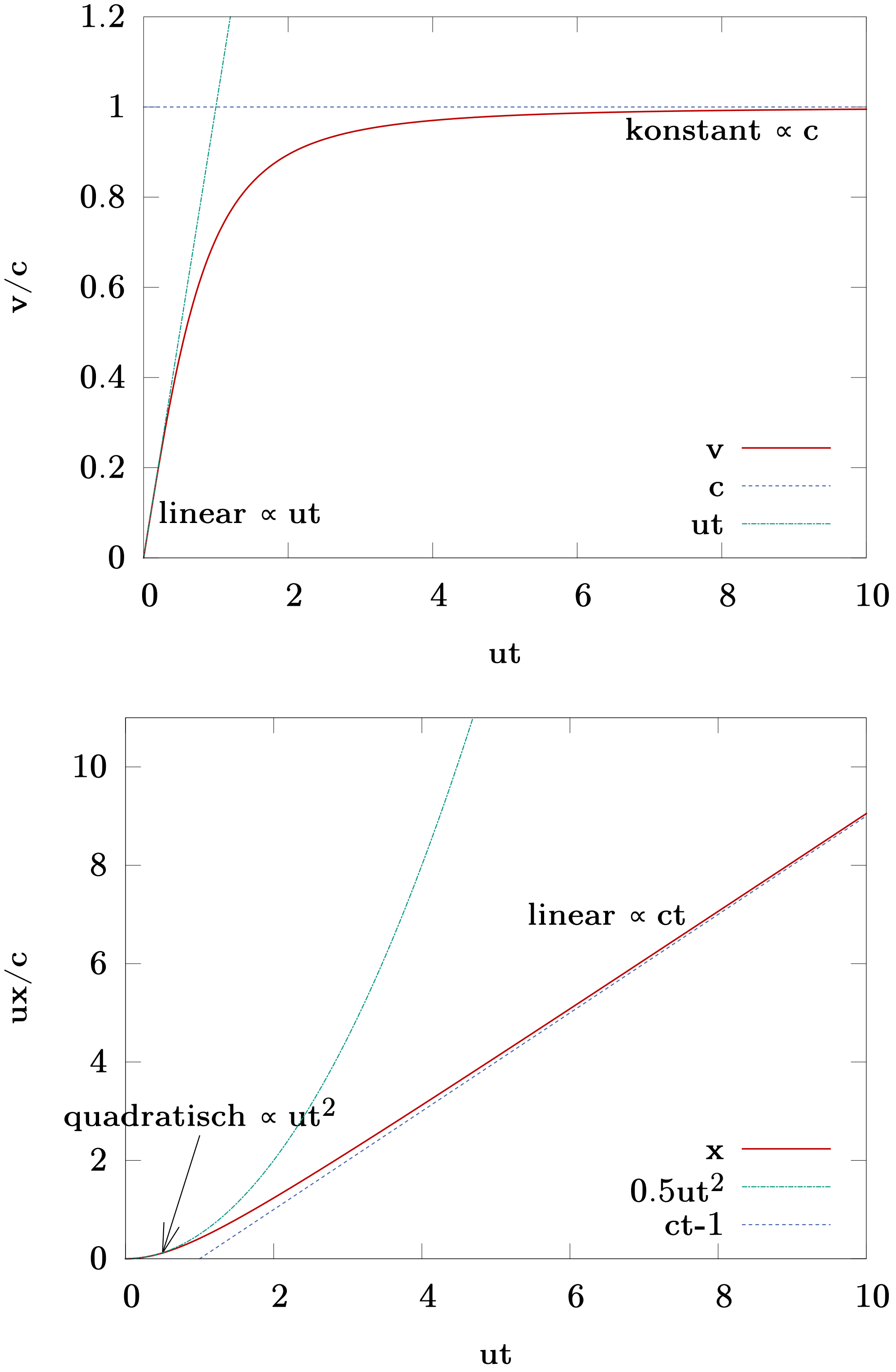


Abbildung 1: Plots zu 4d)