Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Übungsklausur 1 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön **Karlsruhe, 17.12.2015**
Sebastian Zanker, Daniel Mendler **17:45-19:45 Uhr, 120 Minuten Bearbeitungszeit**

Name:		**Matrikelnummer:**	
Vorname:		**Tutor und Übungsgruppe:**	
Studiengang:		**Prüfungsordnung:**	

Wichtige Hinweise:

- Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.
- Dieses Deckblatt auf jeden Fall abgeben.
- Bitte Namen und Matrikelnummer auf jedes Blatt schreiben.
- Bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden.
- Smartphones und andere technische Geräte sind während der Klausur abzuschalten und in Rucksack oder Jacke zu verstauen.
- Zugelassene Hilfsmittel: Ein einseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt.
- Klausurergebnisse werden Anfang nächste Woche im Physikhochhaus am schwarzen Brett im EG ausgehängt.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					
von	10	10	10	10	100 %= 40

VIEL ERFOLG!

1. Aufwärmübung (2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte)

Die Teilaufgaben a) bis e) hängen nicht miteinander zusammen und sind einzeln lösbar.

(a) Berechnen Sie für die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ das Skalarprodukt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ sowie das Kreuzprodukt $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Welchen Winkel schließen die Vektoren ein?

$$\boldsymbol{a} = (1, 2, 2)^\intercal, \quad \boldsymbol{b} = (0, -1, 1)^\intercal$$

(b) Berechnen Sie mittels partieller Integration und/oder Substitution

$$(1) \quad I_1 = \int x \sin(x)\, dx, \qquad (2) \quad I_2 = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx\,.$$

Hinweis: Substituieren Sie im zweiten Integral $x = \sin u$.

(c) Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen auf die Form $z = x + iy$.

$$(1) \quad z_1 = i^2(i + 1), \qquad (2) \quad z_2 = 2e^{i\pi}\,.$$

(d) Berechnen Sie Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t)$ und Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t)$ für die zweidimensionale Bahnkurve

$$\boldsymbol{r}(t) = (ct \cos(\omega t), ct \sin(\omega t))^\intercal\,.$$

(e) Es sei $f(x)$ eine Testfunktion und $\delta(x)$ die Deltafunktion. Berechnen Sie für $x_1 > x_0$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x - \alpha)\delta(x)\mathrm{d}x\,.$$

2. Harmonischer Oszillator (3 + 2 + 2 + 2 + 1 = 10 Punkte)

Betrachten Sie den gedämpften harmonischen Oszillator mit $a, b \geq 0$

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = f(t). \tag{1}$$

(a) Leiten Sie die allgemeine Lösung $x_h(t)$ der homogenen Gleichung mittels eines Exponentialansatzes für $a^2 \neq 4b$ her.

(b) Geben Sie die reelle Lösung der homogenen Gleichung für den unterdämpften Fall $a^2 < 4b$ in Form von trigonometrischen Funktionen an.

(c) Geben Sie die partikuläre Lösung $x_p(t)$ für die treibende Kraft $f(t) = c \sin(\omega t)$ an.

(d) Skizzieren Sie die Antwortfunktion $|\chi(\omega)|$ für die zwei Fälle $0 < a^2 < 2b$ und $a = 0$.

(e) Wie lautet die partikuläre Lösung, wenn zusätzlich eine zweite treibende Kraft der Form $f_2(t) = c_2 \cos(\omega_2 t)$ hinzukommt?

3. Weiße Weihnachten (3 + 2 + 2 + 3 = 10 Punkte)

Der Weihnachtsmann wirft einen Schneeball in der xz-Ebene mit einer Geschwindigkeit $|\boldsymbol{v}(0)| = v_0$ unter einem Winkel α zur x-Achse. Der Abwurfpunkt sei $\boldsymbol{r}(0) = (0,0,0)$. Auf den Schneeball wirkt die konstante Erdbeschleunigung $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = (0,0,-g)$. Nehmen Sie an, dass der Schneeball reibungsfrei fliegt.

(a) Berechnen Sie die Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ des Schneeballs.

(b) Zu welchem Zeitpunkt T und in welchem Abstand $x(T)$ trifft der Schneeball am Boden auf?

(c) Geben Sie das Integral $L(t)$ für die zurückgelegte Wegstrecke des Schneeballs ab dem Zeitpunkt $t = 0$ an und bringen Sie dieses mittels quadratischer Ergänzung und einer Substitution auf die Form

$$L(t) = C \cdot \int_{q(0)}^{q(t)} dq' \sqrt{1 + q'^2}. \tag{2}$$

(d) Bringen Sie nun das Integral (2) durch eine weitere Substitution auf die Form

$$L(t) = C \cdot \int_{u(0)}^{u(t)} du' \cosh^2 u' = \frac{C}{2} \cdot \left[\sinh u' \cosh u' + u'\right]_{u(0)}^{u(t)}. \tag{3}$$

Berechnen Sie den zurückgelegten Weg $L(T)$ des Schneeballs bis zum Auftreffen auf dem Boden.

Hinweis: Nutzen Sie $L(T) = 2L(T/2)$, da die Bahnkurve symmetrisch ist und verwenden Sie $\cosh(\operatorname{arsinh} x) = \sqrt{1 + x^2}$.

4. Linearbeschleuniger (2 + 3 + 3 + 2 = 10 Punkte)

Die Masse eines relativistischen Elektrons hängt über die Relation

$$M(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

von der Geschwindigkeit $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ des Elektrons ab. Hier ist m_0 die konstante Ruhemasse und c die Lichtgeschwindigkeit. In einem konstanten Kraftfeld $F > 0$ folgt der Impuls $p(t) = M(v)v$ des Elektrons der Bewegungsgleichung $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F$. Durch Integration mit der Anfangsbedingung $p(0) = 0$ lässt sich diese auf die folgende Form bringen:

$$M(v)v = Ft \tag{5}$$

(a) Lösen Sie Gleichung (5) nach $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ auf (nachdem Sie den Ausdruck für $M(v)$ eingesetzt haben). Welche der zwei Lösungen für v ist die physikalisch korrekte?

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $x(t)$ indem Sie auf Ihr Ergebnis aus a) das Verfahren der Trennung der Variablen anwenden. Die Anfangsbedingung sei $x(0) = x_0$.

Hinweis: Bei der Integration hilft eine Substitution der Form $\tau = (at)^2$ weiter.

(c) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der Geschwindigkeit $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ für sehr kleine Zeiten $t \approx 0$, indem Sie die Taylorentwicklung Ihres Ergebnisses aus a) bis (einschließlich) zur linearen Ordnung in t berechnen. Welchen asymptotischen Wert nimmt die Geschwindigkeit für sehr große Zeiten $t \to \infty$ an?

(d) Skizzieren Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ und den Ort $x(t)$ für $x_0 = 0$. Beachten Sie dabei die asymptotischen Ergebnisse aus c).