Fourier-Transformation

Im Folgenden werden die schon bekannten Eigenschaften der Fourier-Reihen zur Darstellung periodischer Funktionenn zusammengefasst und dann auf beliebige Funktionen verallgemeinert. Dazu werden die Reihen zu Integralen verallgemeinert. Das Verfahren ist bekannt als Fourier-Transformation.

I. FOURIER-REIHEN

A. Reale Darstellung

Beliebige periodische Funktionen $f(t)$ mit Periode T, d.h. $f(t+T) = f(t)$, können in eine Fourier-Reihe entwickelt werden. D.h. es gilt

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\bar{\omega}t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\bar{\omega}t) \tag{1}$$

mit $\bar{\omega} = 2\pi/T$. Die Koeeffizienten erhalten wir durch folgende Integrale

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T dt\, f(t)\cos(k\bar{\omega}t) \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T dt\, f(t)\sin(k\bar{\omega}t) \tag{3}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T dt\, f(t)\,. \tag{4}$$

Beweis: Wir setzen in das Integral auf der rechten Seite von Gl. (2) die Reihenentwicklung ein

$$\frac{2}{T}\int_0^T dt\, f(t)\cos(k\bar{\omega}t) = \frac{2}{T}\int_0^T dt \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k'=1}^{\infty} a_{k'}\cos(k'\bar{\omega}t) + \sum_{k'=1}^{\infty} b_{k'}\sin(k'\bar{\omega}t)\right]\cos(k\bar{\omega}t) \tag{5}$$

Da $\int_0^T dt\cos(k\bar{\omega}t) = 0$ für $k \neq 0$ verschwindet der erste Term auf der rechten Seite. Die Terme mit Produkten von 2 cosinus-Funktionen bzw. cosinus und sinus schreiben wir um unter Verwendung der Additionstheoreme für sinus und cosinus

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{6}$$

Damit erhalten wir für die Integrale im 2. Term auf der rechten Seite

$$\int_0^T dt\, \cos(k'\bar{\omega}t)\cos(k\bar{\omega}t) = \frac{1}{2}\int_0^T dt\, \{\cos[(k'+k)\bar{\omega}t)] + \cos[(k'-k)\bar{\omega}t]\} = \frac{T}{2}\,\delta_{k,k'}\,. \tag{7}$$

Nur wenn $k' - k = 0$ gibt es einen Integranden, der nicht im Mittel verschwindet. Das Kronecker-δ ist definiert durch $\delta_{k,k'} = 0$ für $k \neq k'$ und $\delta_{k,k'} = 1$ für $k = k'$.
Ähnlich erhalten wir für die Integrale im 3. Term

$$\int_0^T dt\, \sin(k'\bar{\omega}t)\cos(k\bar{\omega}t) = \frac{1}{2}\int_0^T dt\, \{\sin[(k'+k)\bar{\omega}t)] + \sin[(k'-k)\bar{\omega}t]\} = 0 \tag{8}$$

Damit gilt also

$$\frac{2}{T}\int_0^T dt\, f(t)\cos(k\bar{\omega}t) = \frac{2}{T}\sum_{k'=1}^{\infty} a_{k'}\,\frac{T}{2}\,\delta_{k,k'} = a_k \tag{9}$$

und wir haben Gl. (2) bewiesen. Ähnlich können wir Gl. (3) und Gl. (4) zeigen.

B. Komplexe Darstellung

Mit Hilfe der bekannten Relationen

$$\cos(k\bar{\omega}t) = \frac{1}{2}\left(e^{ik\bar{\omega}t} + e^{-ik\bar{\omega}t}\right) \quad \text{und} \quad \sin(k\bar{\omega}t) = \frac{1}{2i}\left(e^{ik\bar{\omega}t} - e^{-ik\bar{\omega}t}\right) \tag{10}$$

finden wir

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_k + \frac{1}{i}b_k)e^{ik\bar{\omega}t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_k - \frac{1}{i}b_k)e^{-ik\bar{\omega}t} \tag{11}$$

Im 3. Term ersetzen wir zunächst $k \to -k'$. Damit wird er

$$\sum_{k'=-1}^{-\infty} \frac{1}{2}(a_{-k'} - \frac{1}{i}b_{-k'})e^{ik'\bar{\omega}t}.$$

Danach schreiben wir statt k' wieder k und ordenen die Terme in der Summe um. Dann gilt

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ik\bar{\omega}t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k})e^{ik\bar{\omega}t} \tag{12}$$

Dies lässt sich elegant zusammenfassen zu

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{ik\bar{\omega}t} \tag{13}$$

mit

$$\begin{aligned} c_k &= a_0/2 && \text{für } k = 0 \\ c_k &= (a_k - ib_k)/2 && \text{für } k > 0 \\ c_k &= (a_{-k} + ib_{-k})/2 && \text{für } k < 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Für alle drei Fälle lässt sich dies schreiben als

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, f(t)e^{-ik\bar{\omega}t} \tag{15}$$

<u>Beweis:</u>
Einsetzen liefert für $k > 0$

$$\begin{aligned} c_k &= (a_k - ib_k)/2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_0^T dt\, f(t)\,[\cos(k\bar{\omega}t) - i\sin(k\bar{\omega}t)] \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T dt\, f(t)\, e^{-ik\bar{\omega}t} \end{aligned} \tag{16}$$

und für $k > 0$

$$\begin{aligned} c_k &= (a_{-k} + ib_{-k})/2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_0^T dt\, f(t)\,[\cos(-k\bar{\omega}t) + i\sin(-k\bar{\omega}t)] \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T dt\, f(t)\,[\cos(k\bar{\omega}t) - i\sin(k\bar{\omega}t)] \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T dt\, f(t)\, e^{-ik\bar{\omega}t} \end{aligned} \tag{17}$$

II. FOURIER-INTEGRAL

A. Defnition

Beliebige, also auch nichtperiodische Funktionen können wir als Grenzfall periodischer Funktionen aber mit Periode $T \to \infty$ interpretieren. Wir schreiben die Ergebnisse von oben noch um unter Einführung von $\omega_k = k\,\bar{\omega} = k\,\frac{2\pi}{T}$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t} \tag{18}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, f(t)e^{-i\omega_k t} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)e^{-i\omega_k t} \tag{19}$$

In der letzen Form haben wir ausgenutzt, dass $f(t)$ und die Exponentialfunktion $e^{-i\omega_k t}$ periodisch sind mit Periode T und wir entsprechend den Intergationsbereich um $-T/2$ verschieben können. Wenn wir die Werte von ω_k auf einer Achse auftragen, sehen wir dass sie eine unendliche Anzahl von diskreten Werten annehmen mit Abstand von $\Delta\omega = 2\pi/T$ zwischen je zwei Nachbarn. Mit wachsendem T liegen sie dichter und dichter, und für $T \to \infty$ liegen sie unendlich dicht, bilden also eine kontinuierliche Menge. Entsprechend werden wir die Summe einer beliebigen Funktion $F(\omega_k)$ über k als Integral über ω_k schreiben

$$\Delta\omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_k\, F(\omega_k) \tag{20}$$

Wir schreiben noch $c_k \to c(\omega_k)$. Damit erhalten wir

$$f(t) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_k\, c(\omega_k)e^{i\omega_k t} \tag{21}$$

$$Tc(\omega_k) = \frac{T}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\, e^{-i\omega_k t} \to \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{-i\omega_k t} \tag{22}$$

Es war nützlich die zweite Gleichung mit dem Faktor T zu multiplizieren. Nach einer letzten Umbennenung

$$\omega_k \to \omega\ , \quad Tc(\omega_k) \to \tilde{f}(\omega) \tag{23}$$

erhalten wir die fundamentalen Relationen der Fourier-Transformation

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t} \tag{24}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{-i\omega t} \tag{25}$$

<u>Zusätzlicher Beweis</u>
Es ist zwar nicht mehr nötig, aber es ist dennoch nett zu sehen, dass wieder alles passt. Wir setzen daher – wie oben bei dem Beweis für die Fourier-Reihen – die Gl. (25) in das Integral auf der rechten Seite von Gl. (24) ein. Dann erhalten wir für das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')e^{-i\omega t'} = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega(t-t')} = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')\, \delta(t-t') = f(t) \tag{26}$$

Als erstes haben wir die Reihenfolge der Integrationen vertauscht, was erlaubt ist, wenn die Integrale genügend konvergent sind (was der Physiker meist erst nachprüft, wenn etwas daneben gegangen ist). Danach haben wir – wie in den Übungen hergeleitet – verwendet, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega(t-t')} = 2\pi\, \delta(t-t') \tag{27}$$

So reproduzieren wir schließlich die linke Seite von Gl. (24).
Analog erhalten wir die linke Seite von Gl. (25), wenn wir Gl. (24) in das Integral auf der rechten Seite von Gl. (25) einsetzen.

B. Bemerkungen

1. Es gibt viele Möglichkeiten die Fourier-Transformierte einer Funktion $f(t)$ zu bezeichnen. Beispiele sind

$$\tilde{f}(\omega) \equiv F[f](\omega) \equiv F(\omega) \equiv f(\omega) \tag{28}$$

Die 2. Form ist vielleicht am präziesesten aber umständlich, die 3. nur bedingt nützlich (z.B. wenn wir F(t) Fourier-transformieren). Die 4. ist die einfachste und wird am häufigsten verwendet. Man muss dann natürlich beachten, dass $f(t)$ und $f(\omega)$ ganz verschiedene Funktionen sind, also nicht nur t durch ω ersetzt ist. Durch die Angabe des Arguments wird aber immer klar, welche Funktion gemeint ist. Im folgenden wird meist die 4. Bezeichnung verwendet.

2. Bei der Hin-Fourier-Transformation, wie oben verwendet, steht $e^{i\omega t}$, bei der Rück-Fourier-Transformation steht $e^{-i\omega t}$. Dies kann auch anderst herum gewählt werden. Es ist nur eine Frage der Konvention und in der Literatur nicht einheitlich. Es ist nur wichtig, an der einmal gewählten Konvention festzuhalten.

3. Bei der einen Fourier-Transformation, wie oben verwendet, steht ein $1/(2\pi)$, also $\int \frac{d\omega}{2\pi} \ldots$, bei der anderen Fourier-Transformation steht nur eine 1, also $\int dt \ldots$. Wo der Faktor $1/(2\pi)$ steht ist wieder nur eine Frage der Konvention. Natürlich unterscheiden sich die Fourier-Transformierten dann um einen Faktor $1/(2\pi)$. Gelegentlich sieht man auch, dass der Faktor demokratisch verteilt wird, also $\int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \ldots$ und $\int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \ldots$.

4. Bisher haben wir zeitabhängige Funktionen transformiert. Die Variable im Fourier-Raum ist dann die "Kreisfrequenz" ω. Daselbe ist natürlich auch möglich für ortsabhängige Funktionen $f(x)$. Die übliche Notation ist dann

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} f(k)\, e^{ikx} \tag{29}$$

$$f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} \tag{30}$$

wobei k als "Wellenzahl" bezeichnet wird. Der Grund dafür ist folgender: Wir hätten auch bei ortsabhängigen Funktionen zunächst periodische mit Periode λ betrachten können, also $f(x+\lambda) = f(x)$. Die könnten wir in eine Fourier-Reihe entwickeln

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} dx\, f(x) e^{-ik_n x} \tag{31}$$

mit $k_n = n\frac{2\pi}{\lambda}$. Die Größe λ ist oft auch ein Wellenlänge, daher die Bezeichnung Wellenzahl für die inverse Größe k_n.

Natürlich kann man das weiter verallgemeinern, z.B. auf Funktionen im 3-dimensionalen Raum $f(\vec{r})$. Dann gilt

$$f(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} f(\vec{k})\, e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{32}$$

$$f(\vec{k}) = \int d^3r\, f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{33}$$

Die 3-dimensionalen Integrale sind dann natürlich über den ganzen unendlichen Wellenzahl- bzw. Ortsraum. Der Vektor $\vec{k}$ wird nun als "Wellenvektor" bezeichnet.

Und schließlich gilt für Orts- und Zeit-abhängige Funktionen

$$f(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f(\vec{k},\omega)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{34}$$

$$f(\vec{k},\omega) = \int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(\vec{r},t)\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{35}$$

Weil es "schöner aussieht" (siehe Wellenausbreitung in späteren Semestern), werden hier gewöhnlich verschiedene Vorzeichenkonventionen im Exponenten für Ort und Zeit gewählt.

C. Beispiele

1. Fourier-Transformierte einer Konstanten, z.B. $f(t) = 1$. Dafür gilt $f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, 1\, e^{-i\omega t} = 2\pi\,\delta(\omega)$

   Rücktransformation $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, f(\omega) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega t} 2\pi\delta(\omega) = 1$

2. $f(t) = e^{i\tilde{\omega} t}$ entspricht $f(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega - \tilde{\omega})$

3. $f(t) = \cos(\tilde{\omega} t)$ entspricht $f(\omega) = \frac{2\pi}{2}\,[\delta(\omega - \tilde{\omega}) + \delta(\omega + \tilde{\omega})]$

4. $f(t) = \frac{1}{\Omega}\Theta(t) e^{-\gamma t}\sin(\Omega t)$ entspricht $f(\omega) = \left(\Omega^2 + \gamma^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma\right)^{-1}$

Bei diesem Beispiel lässt sich die Hintransformation durch elementare Integrationen zeigen und könnte eine Übungsaufgabe sein. Die Rücktransformation ist eine elegante Anwendung der Funktionentheorie (siehe spätere Vorlesungen in der Mathematik) oder erfordert gründliches Suchen in Tabellen.

Wir erkennen im letzten Beispiel, dass $f(t) = G(t, 0)$ die Green'sche Funktion des getriebenen gedämpften harmonischen Oszillators ist. Wenn wir noch berücksichtigen, dass in diesem Fall gilt $\Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ reduziert sich die Fourier-Transformierte auf $f(\omega) = \left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma\right)^{-1} = \chi(\omega)$, also die Responsefunktion, die wir beim harmonisch getriebenen Oszillator kennengelernt hatten.

D. Faltungstheorem

<u>Def.:</u> Gegeben zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$, dann ist deren "Faltung" definiert durch

$$F(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')\, g(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, g(t')\, f(t - t')\,. \tag{36}$$

Die zwei Integrale sind durch eine Variablensubstitution ineinander umformbar.

Für die Faltung gibt es eine einfache Relation im Fourier-Raum. Mit $f(t)$ und $g(t)$ kennen wir auch deren Fourier-Transformierten $f(\omega)$ und $g(\omega)$. Die Frage ist, was ist die Fourier-Transformierte der Faltung $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, F(t)\, e^{-i\omega t}$. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')\, g(t - t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi}\, f(\omega_1)\, e^{i\omega_1 t'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_2}{2\pi}\, g(\omega_2)\, e^{i\omega_2 (t - t')} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi}\, f(\omega_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_2}{2\pi}\, g(\omega_2) \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i(\omega_2 - \omega)t} \int_{-\infty}^{\infty} dt'\ e^{i(\omega_1 - \omega_2)t'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi}\, f(\omega_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_2}{2\pi}\, g(\omega_2)\ 2\pi\,\delta(\omega_2 - \omega)\ 2\pi\,\delta(\omega_1 - \omega_2) \\ &= f(\omega)\, g(\omega) \end{aligned} \tag{37}$$

Wir sehen, dass die Fourier-Transformierte der Faltung von $f(t)$ und $g(t)$ einfach das Produkt der Fourier-Transformierten $f(\omega)$ und $g(\omega)$ ist.

Umgekehrt gilt: Die Fourier-Transformierte eines Produktes ist eine Faltung der Fourier-Transformierten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, f(\omega)\, g(\omega)\, e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')\, g(t - t')\,. \tag{38}$$

Das Faltungstheorem spielt eine wichtige Rolle in der Physik. Wir finden häufig, dass die lineare Antwort ('linear response') eines physikalischen Systems (z.B. die Auslenkung $x(t)$ eines harmonischen Oszillators) auf eine antreibende Kraft $f(t)$ – nach Fourier-Transformation – gegeben ist durch

$$x(\omega) = \chi(\omega) f(\omega)\,. \tag{39}$$

Dann bedeutet dies im Zeitraum nichts anderes als

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi(t-t') f(t') \,. \tag{40}$$

Bei den zeitabhängigen Problemen, die wir hier als Beispiel diskutieren, muss die lineare Antwortfunktion noch kausal sein, also $\chi(t-t') \propto \Theta(t-t')$. Damit reduziert sich Gl. (40) auf

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \chi(t-t') f(t') \,. \tag{41}$$

E. Lösung linearer Differentialgleichungen

Ein wichtiger Nutzen der Fourier-Transformation liegt darin, dass sie eine systematische Lösung linearer Differentialgleichungen erlaubt. Wir betrachten als konkretes Beispiel den gedämpften, getriebenen harmonischen Oszillator (für schwache Dämpfung $\gamma < \omega_0$)

$$D_t^{(2)} x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x(t) = f(t) \,. \tag{42}$$

Wir drücken sowohl $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} x(\omega) e^{i\omega t}$ als auch $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f(\omega) e^{i\omega t}$ durch ihre Fourier-Transformierten aus und setzen diese in Gl. (42) ein. Auf der linken Seite wirken die Ableitungen nach t des Differentialoperators $D_t^{(2)}$ auf die Exponentialfunktion und bringen bei jeder Ableitung einen Faktor $i\omega$. D.h.

$$D_t^{(2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} x(\omega)\, e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2 \right) x(\omega)\, e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f(\omega)\, e^{i\omega t} \,. \tag{43}$$

Damit die Integralgleichung für alle Zeiten erfüllt ist, müssen die Integranten gleich sein. Wir können noch den gemeinsamen Faktor $e^{i\omega t}$ links und rechts herausstreichen und erhalten

$$\left(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2 \right) x(\omega) = f(\omega) \,, \tag{44}$$

also

$$x(\omega) = \frac{f(\omega)}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2} \equiv \chi(\omega) f(\omega) \,. \tag{45}$$

Die gesuchte Lösung $x(t)$ erhalten wir dann durch Rück-Fourier-Transformation.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f(\omega)}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2} e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \chi(\omega)\, f(\omega)\, e^{i\omega t} \,. \tag{46}$$

Das Problem ist also auf eine Integration reduziert und damit "gelöst" (auch wenn eventuell die Integration noch schwierig sein kann).

In Gl. (45) haben wir (wieder) die Response-Funktion $\chi(\omega)$ eingeführt. Wir erkennen also wieder die oben beim Faltungstheorem eingeführten Relationen. D.h. es gilt

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \chi(t-t')\, f(t') \,, \tag{47}$$

wobei $\chi(t)$, die Fourier-Transformierte von $\chi(\omega)$, wie oben schon gesagt gegeben ist durch

$$\chi(t) = \frac{1}{\Omega} \Theta(t)\, e^{-\gamma t} \sin(\Omega t) = G(t,0) \tag{48}$$

mit $\Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$. Die Größe $G(t,0)$ ist die sogenannte Green'sche Funktion des Problems ($G(t,t')$ hängt hier nur von $t-t'$ ab), die wir hier nun mit Hilfe der Fourier-Transformation berechnet haben.

Offensichtlich lässt sich das hier beschriebene Verfahren auf Differentialoperatoren beliebiger Ordnung verallgemeinern, $D_t^{(n)} = a_0 + a_1 \frac{d}{dt} + \dots a_n \frac{d^n}{dt^n}$, solange die Koeffizienten a_i für $i = 0, 1, \dots, n$ zeitlich konstant sind. Ebenso gilt es für lineare Differentialgleichung in Ortsvariablen.