Karlsruher Institut für Technologie WS 2014/15
Institut für theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler **03.12.14**
Besprechung am Donnerstag, 11.12.14

Übungsblatt Nr. 4 zur Vorlesung „Ausgewählte Probleme der Quantenmechanik"

1 Die Quanten Fourier Transformation (20 Punkte)

Die Quanten Fourier Transformation kann definiert werden als

$$|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x_j|j\rangle \ , \ \hat{F}|\psi\rangle = |\tilde{\psi}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} y_k|k\rangle \ , \ y_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} \exp\left[\frac{2\pi i}{N} k\, j\right] x_j \,, \tag{1}$$

mit dem Operator $\hat{F} = \sum_{j,k=0}^{N-1} \frac{e^{\frac{2\pi i}{N} jk}}{\sqrt{N}} |k\rangle\langle j|$.

Der Zustand $|j\rangle$ ist ein Multi-Qubit Zustand,

$$|j\rangle = |j_1 j_2 j_3 \dots j_n\rangle = |j_1\rangle|j_2\rangle|j_3\rangle \dots |j_n\rangle \ , \ j = j_1 2^{n-1} + \dots j_n 2^0 \,, \tag{2}$$

mit $j_l = 0, 1$. Daraus folgt das j werte annehmen kann von $j = 0$ bis $j = 2^n - 1$ ($N = 2^n$). Die Zustände $|j_l\rangle$ sind die Zustände der Qubits aus denen unser Quantencomputer aufgebaut ist. Wenn wir für die einzelnen Zustände $|j_l\rangle$ werte einsetzen schreiben wir immer $|0\rangle_l$ oder $|1\rangle_l$. Für den Zustand $|k\rangle$ gilt dasselbe, wobei er ein Produktzustand aus den Zuständen $|k_l\rangle$ ($l = 1 \dots n$) ist und k_l wiederum 0 oder 1 sein kann. Der Algorithmus den wir suchen ist aufgebaut aus den Operationen, auch Gates genannt,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{2^k}} \end{pmatrix} , \tag{3}$$

wobei gilt

$$\mathbf{H}|0\rangle_l = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_l + |1\rangle_l\right) \ , \ \mathbf{H}|1\rangle_l = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_l - |1\rangle_l\right) \ , \ \mathbf{R}_k|0\rangle_l = |0\rangle_l \ \ \mathbf{R}_k|1\rangle_l = e^{\frac{2\pi i}{2^k}}|1\rangle_l \,. \tag{4}$$

$\mathbf{H}$ ist das Hadamar Gate, $\mathbf{R}_k$ das Phase-Shift-Gate.

Bitte wenden ...

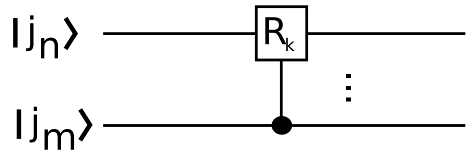

Abbildung 1: Schematische Zeichnung des Controled-Phase-Gate. $|j_n\rangle$ ist hierbei der Ziel Qubit und $|j_m\rangle$ der Kontrol-Qubit.

Das Phase-Shift-Gate wird in unserem Algorithmus immer als Controled-Phase-Gate benutzt, dargestellt durch das Schaltbild 1. Das Controled-Phase-Gate wird dann auf den Ziel Qubit angewandt wenn der Kontrol Qubit im zustand $|1\rangle$ ist. Für Abbildung 1 bedeutet das

$$\begin{aligned} R_k|0_n\rangle|0_m\rangle &= |0_n\rangle|0_m\rangle\ ,\ R_k|1_n\rangle|0_m\rangle = |1_n\rangle|0_m\rangle\ , \\ R_k|0_n\rangle|1_m\rangle &= |0_n\rangle|1_m\rangle\ ,\ R_k|1_n\rangle|1_m\rangle = e^{\frac{2\pi i}{2^k}}|1_n\rangle|1_m\rangle\ . \end{aligned} \tag{5}$$

a) (3 Punkte) Zeigen sie, dass $\hat{F}$ unitär ist.

b) (3 Punkte) Wir fangen an den Algorithmus zu suchen der folgende Transformation durchführt:

$$\hat{F}_j|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left[\frac{2\pi i}{N}jk\right]|k\rangle\ . \tag{6}$$

Zeigen sie dazu, dass gilt

$$\hat{F}_j|j\rangle = 2^{-\frac{n}{2}}\bigotimes_{l=1}^{n}\left[|0\rangle_l + \exp(\frac{2\pi i}{2^l}j)|1\rangle_l\right]\ . \tag{7}$$

c) (3 Punkte) Zeigen sie nun, dass gilt

$$\exp\left[\frac{2\pi i}{2^l}j\right] = \exp\left[2\pi i\sum_{k=1}^{l}j_{n-l+k}2^{-k}\right]\ . \tag{8}$$

Benutzen die dazu die Definition von j, gegebn durch die Gleichung (2).

d) (2 Punkte) Zeigen sie, dass gilt

$$\mathbf{H}|j_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_k + e^{\frac{2\pi i}{2}j_k}|1\rangle_k\right) \tag{9}$$

Fortsetzung auf der nächsten Seite.

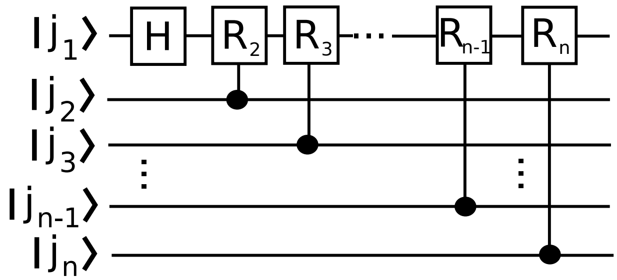

Abbildung 2: Der erste Teil der Quantum Fourier Transformation. Zuerst wird ein Hadamar Gate auf den ersten Qubit angewandt, und dann wird ein Controled Phase Gate zwischen dem ersten und allen anderen Qubits verwendet.

e) (3 Punkte) Wir wenden nun eine Hadamar Gate auf den ersten Qubit an und dann ein Controled-Phase-Gate mit allen folgenden Qubits (siehe Abbildung 2). Zeigen sie, dass dieser Algorithmus folgende Transformation durchführt

$$|j_1 j_2 \dots j_n\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_1 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^{n} j_m 2^{-m}} |1\rangle_1 \right) |j_2 j_3 \dots j_n\rangle \tag{10}$$

Benutzen sie dazu das Ergebnis aus Aufgabenteil d).

f) (3 Punkte) Derselbe Algorithmus wie in Aufgabenteil e) wird nun immer wieder auf einen Qubit nach dem anderen, wie schematisch gezeigt in Abbildung 3, angewandt. Danach wird die Nummerierung der Qubits umgekehrt. Zeigen sie, dass dies gerade dem Operator $\hat{F}_j$ entspricht. Benutzen sie dazu Aufgabenteil b), c) und e).

g) (3 Punkte) Warum entspricht der Algorithmus der in Abbildung 3 gezeigt ist nicht nur dem Operator $\hat{F}_j$ sondern gleich auch dem Operator $\hat{F}$ und damit der Quantum Fourier Transformation die wir gesucht haben?

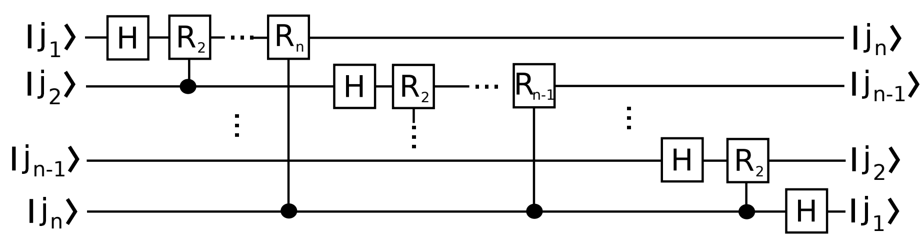

Abbildung 3: Die Vollständige Quanten Fourier Transformation.