Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

Prof. Dr. G. Schön **Blatt 6**

Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke **Besprechung, 24.05.2013**

---

1. Master-Gleichung: 6 **Punkte**

Ein Kasten A vom Volumen Ω sei mit einem viel größeren Kasten B durch ein kleines Loch verbunden. Teilchen können das Loch nur einzeln passieren. Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit Δt ein Gasteilchen von A nach B geht, sei proportional zu $N\Delta t/\Omega$ (N: Zahl der Teilchen in A), und die Wahrscheinlichkeit von B nach A zu gehen sei proportional zu (gleiche Proportionalitätskonstante) $\rho\Delta t$ (ρ: konstante Teilchendichte in B).

(a) (3 Punkte) $P(N,t)$ sei die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t gerade N Teilchen in A zu finden. Schreiben Sie die Mastergleichung für $P(N,t)$ auf und lösen Sie sie für den stationären Fall.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie $\langle N(t)\rangle$, indem Sie das erste Moment der Mastergleichung bilden und die entstehende Differentialgleichung lösen.

2. Langevin-Gleichung: 10 **Punkt**

Wir betrachten einen stromgetriebenen RCL-Schwingkreis, d.h. eine Parallelschaltung aus Widerstand, Kapazität und Induktivität. Das Gleichgewicht der Ströme führt zur Bewegungsgleichung

$$C\ddot{V} + \frac{\dot{V}}{R} + \frac{V}{L} = \dot{I}_0 + \delta\dot{I}\,. \tag{1}$$

δI beschreibt Nyquist-Rauschen, d.h. es gilt

$$\langle \delta I(t)\rangle = 0\ ,\ \langle \delta I(t)\delta I(t')\rangle = \frac{2k_BT}{R}\delta(t-t')\,. \tag{2}$$

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Impedanz $Z(\omega) = V(\omega)/I(\omega)$ durch Fouriertransformation der Bewegungsgleichung.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie $\langle \delta V(\omega)\delta V(\omega')\rangle$ sowie die Spektralfunktion $S_V(\omega)$ des Spannungsrauschens.

Hinweis: Fluktuationen in einer Größe x sind definiert als $\delta x = x - \langle x\rangle$. Benutzen sie ausserdem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} = \delta(\omega)\,.$$

(c) (5 Punkte) Berechnen und skizzieren Sie die Korrelationen des Spannungsrauschens $\langle \delta V(t)\delta V(t')\rangle$ im Fall $(2RC)^2 > LC$.

Hinweise: Verwenden Sie den Residuensatz zur Lösung des Integrals.

3. Fockker-Planck-Gleichung: 4 **Punkt**

Wir betrachten nun eine Parallelschaltung aus einem Wiederstand und einer Kapazität,

$$C\dot{V} + \frac{V}{R} = \delta I(t) \tag{3}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung aus Aufgabe 2, mit $L \to \infty$ und $I_0 = 0$. δI beschreibt wieder Nyquist-Rauschen, d.h. es gilt

$$\langle \delta I(t) \rangle = 0 \ , \ \langle \delta I(t) \delta I(t') \rangle = \frac{2k_B T}{R} \delta(t - t') \,. \tag{4}$$

(a) (2 Punkte) Stellen sie die Fokker-Planck-Gleichung auf für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von V.

(b) (2 Punkte) Finden sie die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung für V.