Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

Prof. Dr. G. Schön

Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke

Blatt 4

Besprechung, 10.05.2013

---

1. Schrotrauschen: **10 Punkte**

Zwei metallische Leiter 1 und 2 seien durch eine dünne isolierende Schicht voneinander getrennt. Stromfluss von einem Leiter zum anderen ist möglich, da es wegen quantenmechanischen Tunnelns eine endliche Wahrscheinlichkeit dafür gibt, dass Elektronen die isolierende (und damit klassisch verbotene) Schicht überwinden. Die Zahl $n(\tau)$ der Elektronen, die innerhalb eines Zeitintervalls $[0, \tau]$ die Barriere vom Leiter 1 kommend durchtunneln, ist im Grenzfall kleiner Tunnelwahrscheinlichkeit mit dem Parameter Γ_{12} Poisson-verteilt. Der Strom ist eine stochastische Variable gegeben durch

$$I(t) = e \sum_{j=1}^{n(\tau)} \delta(t - t_j) \quad , \tag{1}$$

mit über dem Intervall $[0, \tau]$ gleichverteilten stochastischen Variablen t_j. Mittelwertbildung erfolgt demnach durch die Vorschrift

$$\langle X(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\tau \Gamma_{12}} \frac{\Gamma_{12}^n}{n!} \int_0^\tau dt_1 \ldots \int_0^\tau dt_n X(t, t_1, \ldots, t_n). \tag{2}$$

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den mittleren Strom $\langle I(t) \rangle$. Finden Sie eine vom Ergebnis nahegelegte physikalische Interpretation für den Parameter Γ_{12}.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\langle I(t)\, I(t') \rangle$. Das Ergebnis sagt etwas über Korrelationen der Stromfluktuationen $\delta I(t) = I(t) - \langle I(t) \rangle$ (Rauschen) aus. Interpretieren Sie!

(c) (3 Punkte) Verallgemeinern Sie die Rechnungen in (a,b) für den Fall, dass Elektronen auch in die Gegenrichtung (Parameter: Γ_{21}) tunneln können. Zeigen sie das in diesem Fall der mittlere Strom gegeben ist durch $\langle I \rangle = e\,(\Gamma_{12} - \Gamma_{21})$.

(d) (3 Punkte) Eine Spannung V sei am Tunnelkontakt angelegt, so dass das chemische Potential im Leiter 1 um eV über dem des Leiters 2 liegt. Benutzen Sie die aus dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts folgende Beziehung $\Gamma_{12}/\Gamma_{21} = \exp(eV/kT)$, um für einen Kontakt mit linearer Strom-Spannungs-Charakteristik, $\langle I \rangle = V/R$, die Parameter Γ_{12} und Γ_{21} durch V und R auszudrücken. Berechnen Sie damit die Spektraldichte $S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} \langle \delta I(t)\, \delta I(0) \rangle$ des Rauschens als Funktion von V und T und diskutieren Sie den Grenzfall $kT \gg eV$.

2. Gauß-Verteilung für mehrere Variablen: **5 Punkte**

Die Gauß-Verteilung $\rho(\xi_1, \ldots, \xi_M)$ für die stochastischen Variablen $\xi_1, \ldots \xi_M$ sei definiert durch

$$\rho(\xi_1, \ldots, \xi_M) = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{A})}{(2\pi)^M}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{M} \xi_i A_{ij} \xi_j \right) \tag{3}$$

wobei A eine symmetrische, positiv definite Matrix ist.

(a) (3 Punkte) Betrachten Sie die charakteristische Funktion

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \langle e^{i\sum_{j=1}^{M} \lambda_j \xi_j} \rangle$$

und zeigen Sie, dass

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M} \lambda_i [A^{-1}]_{ij} \lambda_j\right]$$

gilt.

Hinweis: Da A symmetrisch ist, ist auch A^{-1} symmetrisch.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der charakteristischen Funktion die Kovarianz $\langle \xi_i \xi_j \rangle$ und die Korrelation 4. Ordnung $\langle \xi_i \xi_j \xi_k \xi_m \rangle$.

3. Gauß-Verteilung für zeitabh. stochastische Variablen: 5 Punkte

Die in Aufgabe 2 gewonnen Resultate können auf eine zeitabhängige stochastische Variable $\xi(t)$ im Zeitintervall $[0, \tau]$ angewandt werden. Man sagt, $\xi(t)$ sei Gauß-verteilt, wenn die Verteilungsfunktion für die Funktion $\xi(t)$ gegeben ist durch

$$\rho(\{\xi(t)\}) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\tau dt \int_0^\tau dt'\, \xi(t) g^{-1}(t-t') \xi(t')\right). \tag{4}$$

(a) (1 Punkt) Um eine Interpretation für obige Verteilungsfunktion zu finden, diskretisieren Sie die Zeit in M Zeitintervalle Δt. Bringen Sie die diskretisierte Verteilungsfunktion in die Form der Gleichung (3).

(b) (2 Punkte) Zeigen sie, dass gilt

$$\left\langle \exp\left(i \int_0^\tau dt\, \xi(t)\right)\right\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \langle \xi(t)\xi(t')\rangle_c\right], \tag{5}$$

indem Sie wieder die Zeit diskretisieren und danach das Ergebnis wieder durch Integrale ausdrücken.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle$. Finden Sie daraus eine physikalische Interpretation für die Größe $g(t-t')$. Unter welchen Umständen ist die Diskretisierung der Zeit eine gute Näherung?