Karlsruher Institut für Technologie

Institut f"ur Theoretische Festkörperphysik

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

Prof. Dr. G. Schön

Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke

Lösungsvorschlag zu Blatt 9

21.06.2013

---

1. Bose-Einstein-Kondensation in Atomfallen:

(a) Zu lösen ist eine Schrödingergleichung mit dem Hamiltonoperator

$$H = H_{\text{kin}} + V(x,y,z) = H_x + H_y + H_z$$
$$H_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_\alpha^2 x_\alpha^2, \quad \alpha = x,y,z.$$

Ein Separationsansatz führt auf drei unabhängige Gleichungen für die drei Raumrichtungen:

$$\Psi(x,y,z) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z) \quad \Rightarrow \quad H_\alpha\varphi_\alpha(x_\alpha) = E_\alpha\varphi_\alpha(x_\alpha).$$

Jede der Funktionen φ_α ist eine Wellenfunktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators. Zustände des Gesamtsystems sind eindeutig beschrieben durch die Quantenzahlen l_x, l_y, l_z und haben die bekannten Eigenenergien

$$E = E_{l_x} + E_{l_y} + E_{l_z} \equiv E_{\vec{l}} \qquad E_{l_\alpha} = \hbar\omega_\alpha(l_\alpha + \frac{1}{2}).$$

(b) Bei einer Bose-Einstein-Kondensation wird der Grundzustand makroskopisch besetzt. Der Grundzustand der Atomfalle ist der niedrigste Oszillatorzustand, mit einer Gauß-förmigen Wellenfunktion

$$\Psi(x,y,z) \sim e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\lambda_x^2}+\frac{y^2}{\lambda_y^2}+\frac{z^2}{\lambda_z^2}\right)} \quad \text{mit} \quad \lambda_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_\alpha}}.$$

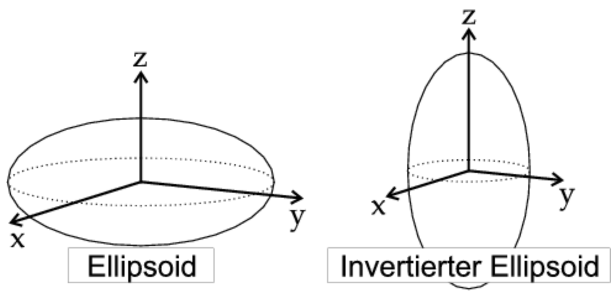
Das typische Volumen lässt sich aus der Breite der Dichteverteilung $|\Psi(x,y,z)|^2 \sim \exp\{-(\frac{x^2}{\lambda_x^2}+\frac{y^2}{\lambda_y^2}+\frac{z^2}{\lambda_z^2})\}$ ableiten. Die Breite der Gaußkurve ist ungefähr $2\sigma = \sqrt{2}\,\lambda_\alpha$, also (bis auf einen Faktor $\sqrt{2}$)

$$V \sim \prod_\alpha(\lambda_\alpha) = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{D/2}, \qquad \omega = \left(\prod_\alpha \omega_\alpha\right)^{1/D}.$$

Die Wellenfunktion des Grundzustands im Impulsraum ist

$$\widetilde{\Psi}(k_x,k_y,k_z) \sim e^{-\frac{1}{2}(\lambda_x^2k_x^2+\lambda_y^2k_y^2+\lambda_z^2k_z^2)} \qquad \text{mit} \quad k_\alpha = \frac{p_\alpha}{\hbar},$$

auch die Verteilungsfunktion im Impulsraum hat also die Form einer Gauß-Kurve.



Dichteverteilung: $|\Psi(x,y,z)|^2 \to$ Ellipsoid
Geschwindigkeitsverteilung: $|\tilde{\Psi}(k_x,k_y,k_z)|^2 \to$ invertierter Ellipsoid

Zum Vergleich: Uniformer Fall (Teilchen im Kasten mit periodischen Randbedingungen)

$$\Psi_u(x,y,z) \sim \frac{1}{\sqrt{V}} \qquad \text{homogen, BEC nicht im Ortsraum identifizierbar}$$
$$\widetilde{\Psi}_u(k_x,k_y,k_z) \sim \delta(k_x)\delta(k_y)\delta(k_z)$$

BEC für das uniforme Bose-Gas äussert sich nur im Impulsraum,
BEC in der Atomfalle ist sowohl im Orts- als auch im Impulsraum identifizierbar!

(c) Boseverteilung:

$$n_B(\varepsilon_\lambda) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda-\mu)}-1} = \frac{ze^{-\beta\varepsilon_\lambda}}{1-ze^{-\beta\varepsilon_\lambda}} \qquad \text{mit} z = e^{\beta\mu}$$

mittels der geometrischen Reihe:

$$n_B(\varepsilon_\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j e^{-j\beta\varepsilon_\lambda}$$

damit ($\tilde{z} = z\exp\{-\beta E_0\}$)

$$N = \sum_{\{\lambda\}} n_B(\varepsilon_\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j \sum_{l_x,l_y,l_z} e^{-j\beta E_{\vec{l}}} = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \sum_{l_x,l_y,l_z} e^{-j\beta \widetilde{E}_{\vec{l}}} = \underbrace{\frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}}}_{\vec{l}=0} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \sum_{\vec{l}\neq 0} e^{-j\beta\widetilde{E}_{\vec{l}}}$$

wenn $k_BT \gg \hbar\omega_i$ können die Summen durch Integrale ersetzt werden

$$\sum_{\vec{l}\neq 0} \cdots \approx \int_0^\infty \mathrm{d}l_x \int_0^\infty \mathrm{d}l_y \int_0^\infty \mathrm{d}l_z.$$

Bemerkung: Die Integralersetzung ist erst durch Abspalten des Grundzustandes zulässig. erst dann variiert der Summand langsam als Funktion von l.
Damit erhält man, mit der Definition des Polylogarithmus $\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$ und $g_3(z) = \mathrm{Li}_3(z)$,

$$\begin{aligned} N - N_0 &= \sum_j \tilde{z}^j \int \mathrm{d}l_x\mathrm{d}l_y\mathrm{d}l_z \; e^{-j\beta\hbar(\omega_x l_x+\omega_y l_y+\omega_z l_z)} \\ &= \left(\frac{k_BT}{\hbar}\right)^3 \frac{1}{\omega_x\omega_y\omega_z} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}^j}{j^3} = \left(\frac{k_BT}{\hbar\omega}\right)^3 g_3(\tilde{z}) \qquad \text{mit } \omega = \sqrt[3]{\omega_x\omega_y\omega_z}. \end{aligned}$$

Bose-Einstein-Kondensation kann auftreten, wenn die Zahl der Teilchen in angeregten Zuständen beschränkt ist, alle Teilchen darüber hinaus müssen sich dann im Grundzustand befinden. Da für Bosonen $\mu \leq 0$ gilt, folgt $\tilde{z} = \exp\{\beta(\mu - E_0)\} \leq 1$ und erlaubt die Abschätzung $g_3(\tilde{z}) \leq g_3(1) \equiv \zeta(3) \approx 1,2$. Die Zahl der Bosonen in angeregten Zuständen ist damit beschränkt und eine Funktion der Temperatur:

$$N - N_0 \leq \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3 \zeta(3) \leq N$$

Die Kondensation setzt unterhalb einer kritischen Temperatur ein, die von der Teilchenzahl abhängt, und es gilt dann

$$\frac{N_0}{N} \geq 1 - \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3 \frac{\zeta(3)}{N}, \qquad \frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^3 \quad \text{mit} \quad \boxed{T_C = \frac{\hbar\omega}{k_B}\left(\frac{N}{\zeta(3)}\right)^{1/3}}$$

(d) Zustandsdichte in der Atomfalle

$$\begin{aligned} N(E) &= \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\sum_{\vec{l}\neq 0} \theta(E - E_{\vec{l}}) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\int \mathrm{d}^D l\ \theta(E - E_{\vec{l}}) \\ &= \frac{1}{V}\left(\frac{1}{\prod_\alpha \hbar\omega_\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\int \mathrm{d}^D \tilde{l}\ \theta\left(E - \sum_\alpha^D \tilde{l}_\alpha\right) \end{aligned}$$

Benutze

$$\int d^D\tilde{l}\ \theta\left(E - \sum_\alpha \tilde{l}_\alpha\right) = \int_0^E \mathrm{d}\tilde{l}_x \int_0^{E-\tilde{l}_x} \mathrm{d}\tilde{l}_y \int_0^{E-\tilde{l}_x-\tilde{l}_y} d\tilde{l}_z \qquad (D = 3)$$

analog in $D = 2$ und $D = 1$ erhält man

$$N(E) = \frac{1}{V}\left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)^D \frac{E^{D-1}}{(D-1)!} \quad \text{mit} \quad \omega = \left(\prod_\alpha \omega_\alpha\right)^{1/D} \quad \text{und} \quad V \sim \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{D/2}$$

(Volumen der Atomfalle siehe Teilaufgabe 1b))

Im Vergleich dazu für das uniforme Bose-Gas:

$$\begin{aligned} N_u(E) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int \mathrm{d}^D p \, \delta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right) \\ &= \frac{\Omega_D}{(2\pi\hbar)^D} \int \mathrm{d}p \, p^{D-1} \delta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right) = \frac{\Omega_D}{2} \left(\frac{m}{2\pi^2\hbar^2}\right)^{D/2} E^{D/2-1} \end{aligned}$$

Benutze $\int_0^\infty \mathrm{d}E \, E^{\alpha-1} e^{-j\beta E} = (j\beta)^{-\alpha}\Gamma(\alpha)$ und finde

$$N - N_0 = \begin{cases} \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^D g_D(\tilde{z}) & \text{für die Atomfalle} \\ V \left(\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{D/2} g_{D/2}(z) & \text{für das uniformes Bose-Gas} \end{cases}$$

Bose-Einstein Kondensation tritt auf, wenn $N - N_0 < \infty$ beschränkt ist, und da für den Polylogarithmus gilt $g_\alpha(1) < \infty$ für $\alpha > 1$, sieht man

- BEC tritt in der Atomfalle für $D > 1$
- BEC tritt in homogenem Bose-Gas für $D > 2$

auf.

Für die kritische Temperatur gilt

$$\begin{aligned} & T_C \sim \left(\frac{N}{V}\right)^{1/D} && \text{in der Atomfalle, da} \quad V \sim \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{D/2} \\ \text{und} \quad & T_C \sim \left(\frac{N}{V}\right)^{2/D} && \text{im uniformen Bose-Gas} \end{aligned}$$

2. Planck'sches Strahlungsgesetz:

(a) Spektrale Energiedichte:

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \qquad \text{pro Volumen}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{3\omega^2 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right) - \omega^3 e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \frac{\hbar}{k_B T}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Maximum}}}{=} 0$$

$$\left(3\omega^2 - \frac{\hbar\omega^3}{k_B T}\right) e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} = 3\omega^2$$

$$\text{mit} \quad x = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \frac{x}{3} = e^{-x}, \qquad x = 2.8214\dots = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$$

(b) Temperaturen aus dem Maximum der Frequenzverteilung

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}, \quad \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}, \quad \hbar\omega_{\max} \approx 2.82 k_B T = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_{\max}},$$

$$T = \frac{hc}{k_B} \frac{1}{2.82\lambda_{\max}} \quad \text{mit} \quad \frac{hc}{k_B} = 1.44\,\text{cm}\,\text{K}$$

Beachte: $\lambda_{\max} = \lambda(\omega_{\max})$ ist die zum Maximum der Frequenzverteilung $u(\omega)$ zugehörige Wellenlänge, und unterscheidet sich wegen $u(\omega)d\omega = u(\lambda)d\lambda$ von der Wellenlänge, bei der die wellenlängenabhängige Verteilung $u(\lambda)$ ihr Maximum hat. Mit den auf dem Aufgabenblatt gegebenen Werten (CMB:$\lambda_{\max} = 0,16$cm, Erde: $\lambda_{\max} = 1,6 \cdot 10^{-3}$cm, Sonne: $\lambda_{\max} = 0,8 \cdot 10^{-4}$cm) erhält man

- Grundstrahlung des Weltalls: $T = 3,2\,$K,
- Erdoberfläche: $T = 319$K $\sim 46\,°$C,
- Sonnenoberfläche: $T = 6380$K.

Allerdings sind die angegebenen Werte nicht ganz korrekt, genauer sind

- CMB: $\lambda_{\max} = 0,187$cm, $\quad T = 2,73\,$K,
- Sonnenoberfläche: $\lambda_{\max} = 0,88 \cdot 10^{-4}$cm, $\quad T = 5800$K.

Das Emissionsspektrum der Erde kann stückweise aus schwarzen Strahlern verschiedener Temperaturen von 220 K bis 320 K zusammengesetzt werden, mit $\lambda_{\max} = 1,6 - 2,3 \cdot 10^{-3}\mu$m.