Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

Prof. Dr. G. Schön

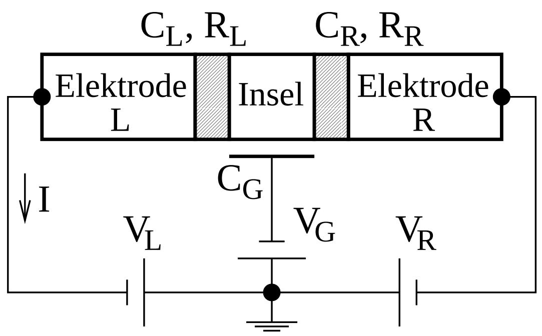
Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke

Lösungsvorschlag zu Blatt 5

17.05.2010

---

1. Master-Gleichung für den Einzelelektronentransistor:



(a) Thermodynamisches Potential, das im Gleichgewicht minimal ist: freie Energie E definiert durch

$$E = U - \sum_{j=R,L,G} Q_j \times (-V_j) = U + \sum_j Q_j V_j.$$

Beachten sie die Vorzeichenkonvention für V_j im obigen Schaltbild.
Gesamtladung der Insel: $-Ne = \sum_j Q_j$, mit $Q_j = C_j(V_I - V_j)$ findet man

$$-Ne = V_I \sum_j C_j - \sum_j C_j V_j.$$

Also

$$-Ne = CV_I - Q_x$$

oder

$$V_I = (-Ne + Q_x)/C.$$

Die freie Energie $E(N)$ ist dann:

$$\begin{aligned}
E &= \sum_j \frac{Q_j^2}{2C_j} + \sum_j Q_j V_j \\
&= \sum_j C_j \underbrace{\left[\frac{1}{2}(V_I - V_j)^2 + (V_I - V_j)V_j\right]}_{\equiv \frac{1}{2}(V_I^2 - V_j^2)} \\
&= \frac{1}{2} C V_I^2 - \frac{1}{2} \sum_j C_j V_j^2
\end{aligned}$$

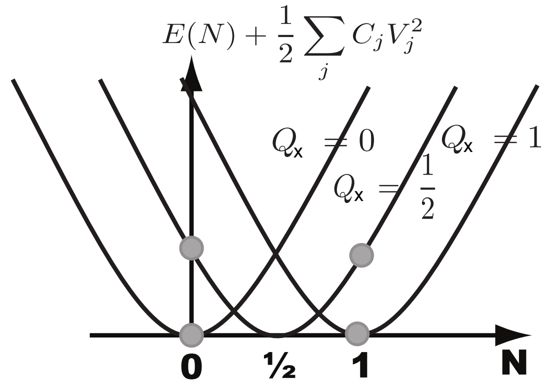
und schließlich

$$\boxed{E(N) = \frac{(Ne - Q_x)^2}{2C} - \frac{1}{2}\sum_j C_j V_j^2}$$

N_* sei definiert als die ganze Zahl N, die $E(N)$ minimiert

$$N_* = \text{round}\left(\frac{Q_x}{e}\right)$$

Als Bild, die freie Energie ist:



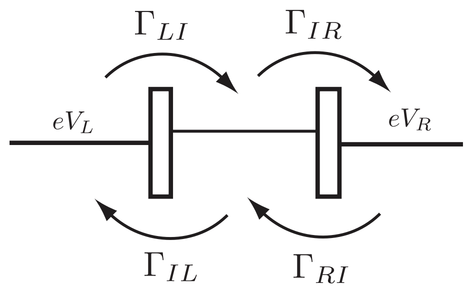
(b) Die Mastergleichung ist allgemein durch

$$\dot{P}_N(t) = \sum_m \left[\Gamma_{m\to N} P_m(t) - \Gamma_{N\to m} P_N(t)\right]$$

gegeben, wobei $\Gamma_{m\to N}$ die Übergangsrate von Zustand m nach N ist, und $\Gamma_{N\to m}$ die Übergangsrate von Zustand N nach m.
In diesem Fall:

$$\begin{aligned}\dot{P}_N(t) &= \{\Gamma_{LI}(N-1) + \Gamma_{RI}(N-1)\}P_{N-1}(t) \\ &\quad +\{\Gamma_{IL}(N+1) + \Gamma_{IR}(N+1)\}P_{N+1}(t) \\ &\quad -\{\Gamma_{IL}(N) + \Gamma_{LI}(N) + \Gamma_{IR}(N) + \Gamma_{RI}(N)\}P_N(t)\end{aligned}$$

wobei die Γs durch



definiert sind.
Speziell wenn nur $P_n, P_{n+1} \neq 0$ bzw. $\Gamma_{LI}(n), \Gamma_{RI}(n), \Gamma_{IL}(n+1)$ und $\Gamma_{IR}(n+1)$ als einzige Raten von Null verschieden sind:

$$
\begin{aligned}
\dot{P}_n(t) &= \{\Gamma_{IL}(n+1)+\Gamma_{IR}(n+1)\}P_{n+1}(t) - \{\Gamma_{LI}(n)+\Gamma_{RI}(n)\}P_{n+1}(t) \\
\dot{P}_{n+1}(t) &= \{\underbrace{\Gamma_{LI}(n)+\Gamma_{RI}(n)}_{\equiv\Gamma_+}\}P_n(t) - \{\underbrace{\Gamma_{IL}(n+1)+\Gamma_{IR}(n+1)}_{\equiv\Gamma_-}\}P_n(t).
\end{aligned}
$$

Ersetze $P_{n+1} = 1 - P_n$ in der ersten Gleichung und $P_n = 1 - P_{n+1}$ in der zweiten. Dann finden wir

$$
\begin{aligned}
\dot{P}_n &= \Gamma_- - (\Gamma_+ + \Gamma_-)P_n \\
\dot{P}_{n+1} &= \Gamma_+ - (\Gamma_+ + \Gamma_-)P_{n+1}
\end{aligned}
$$

(inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung mit konstant Koeffizienten.)
Leicht zu lösen, z.B. durch Methode der 'Variation der Konstanten'.

$$
\begin{aligned}
P_n(t) &= \frac{\Gamma_-}{\Gamma} + c_n e^{-\Gamma t} \\
P_{n+1}(t) &= \frac{\Gamma_+}{\Gamma} + c_{n+1} e^{-\Gamma t}
\end{aligned}
$$

mit $\Gamma = \Gamma_+ + \Gamma_-$ und Konstanten c_n, c_{n+1}.

Stationärer Grenzfall, $t \gg \Gamma^{-1}$, dann P_n, P_{n+1} zeitunabhängig.

$$
\begin{aligned}
P_n &\to \frac{\Gamma_-}{\Gamma} \\
P_{n+1} &\to \frac{\Gamma_+}{\Gamma}
\end{aligned}
$$

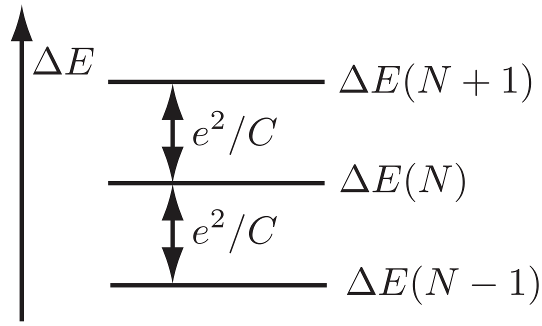
(c) Im stationären Grenzfall ist der Strom über den linke und rechten Tunnelkontakt identisch und gleich I.

$$
\begin{aligned}
I &= -e\left[\Gamma_{LI}(n)P_n - \Gamma_{IL}(n+1)P_{n+1}\right] \\
&= -\frac{e}{\Gamma}\left[\Gamma_{LI}(n)\Gamma_- - \Gamma_{IL}(n+1)\Gamma_+\right] \\
&= -\frac{e}{\Gamma}\left[\Gamma_{LI}(n)\Gamma_{IR}(n+1) - \Gamma_{RI}(n)\Gamma_{IL}(n+1)\right]
\end{aligned}
$$

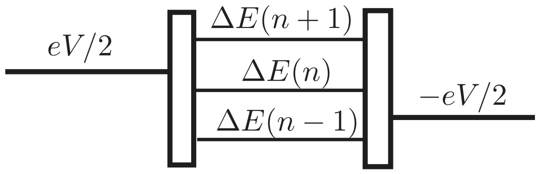
Interpretation: $I = I_{L\to R} - I_{R\to L}$.
$I_{L\to R}$ Beitrag wenn ein Elektron von $L \to I$ tunnelt, dann ein weitere von $I \to R$.
$I_{R\to L}$ umgekehrt.
Deshalb nennt man es sequentielles Tunneln, ein Elektron tunnelt auf die Insel und im Anschluss eines auf der anderen Seite herunter.

Diskrete Energieniveaus:

$$\Delta E = E(N+1) - E(N) = \frac{e}{C}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)e - Q_x\right]$$



(d) Symmetrisch vorgespannte Situation:
Damit nur zwei Ladungszustände $(n,\, n+1)$ eine Rolle spielen, muss $kT \ll e^2/C$ und $|eV| \ll e^2/C$ gelten.



Zwei Fälle: (i) $\Delta E(n) - eV/2 < 0 < eV/2 + \Delta E(n)$
(ii) dasselbe mit $V \to -V$.

Betrachten wir (i):

$$\Gamma_{LI}(N) = \frac{eV/2 - \Delta E(N)}{e^2 R}, \qquad \Gamma_{IL}(N) = 0$$

$$\Gamma_{RI}(N) = 0, \qquad \Gamma_{IR}(N) = \frac{eV/2 + \Delta E(N)}{e^2 R}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} I &= -e\frac{\Gamma_{LI}(N)\Gamma_{IR}(N+1)}{\Gamma_{LI}(N) + \Gamma_{IR}(N+1)} \\ &= \frac{-1}{e^2 RV}\left\{\frac{1}{4}e^2V^2 - \frac{e^2}{C^2}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)e - Q_x\right]\right\} \\ &= \frac{-1}{4R}\left[V - \frac{4e^2}{CV}\left(N + \frac{1}{2} - \frac{Q_x}{e}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Transistor: Kontrolle des Kollektoroutputs durch Basisspannung. Coulombblockade für $V < e/C$