Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

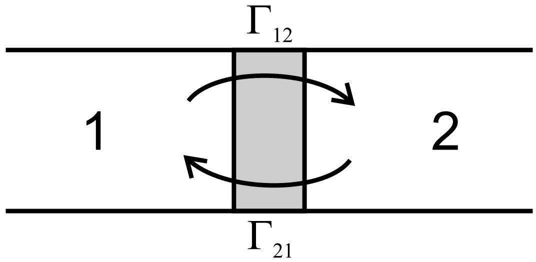
Prof. Dr. G. Schön
Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenike

Lösungsvorschlag zu Blatt 4
10.05.2013

---

1. Schrotrauschen:

Wir beginnen mit einigen Vorbetrachtungen. Wir betrachten einen Tunnelkontakt:



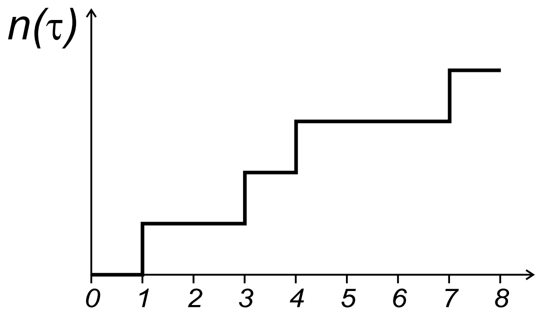
innerhalb des Intervalls $[0, \tau]$ versuchen $N = \omega_0 \tau$ Elektronen (ω_0 = charakteristische "attempt frequency"), von 1 kommend, die Barriere zu durchtunneln. Die Zahl der Elektronen, die es schaffen, $n(\tau)$, ist eigentlich binomial verteilt:

$$n(\tau) = \int_0^\tau dt \sum_{j=0}^{\infty} a_j \delta\left(t - j\omega_0^{-1}\right) = \sum_{j=0}^{N} a_j$$

wobei a_j eine stochastische Variable mit Werten 0;1 und der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P_{a_j} = T\delta(a_j - 1) + [1 - T]\delta(a_j)$$

ist.

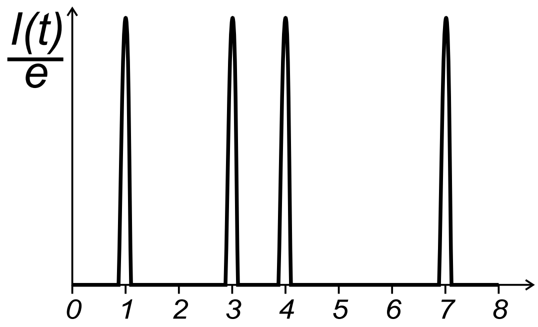


also ist $\langle n(\tau)\rangle = NT \underset{T\to 0}{\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}} \tau\Gamma_{12}$ im Grenzfall wenn die Binomialverteilung in eine Poissonverteilung übergeht.

Wir betrachten den Strom als stochastische Variable:

$$en(\tau) = \int_0^\tau dt\, I(t) \quad \Rightarrow \quad I(t) = e\left.\frac{dn}{d\tau}\right|_{\tau=t} = e\sum_{j=0}^{\infty} a_j \delta\left(t - j\omega_0^{-1}\right) = e\sum_l \delta(t - t_l)$$

wobei die t_l stochastisch gleichverteilte Zeiten bezeichnen, bei denen jeweils ein Elektron tunnelt.



a.)

$$\langle I\rangle = e^{-\tau\Gamma_{12}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma_{12}^{n}}{n!}\underbrace{\int_0^\tau dt_1\ldots\int_0^\tau dt_n\, e\sum_{l=1}^{n}\delta(t-t_l)}_{=en\tau^{n-1}} = \underbrace{e^{-\tau\Gamma_{12}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\tau\Gamma_{12})^{n-1}}{(n-1)!}}_{=1}e\Gamma_{12}$$

$$\boxed{\langle I\rangle = e\Gamma_{12}} \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma_{12} \text{ ist mittlere Tunnelrate.}$$

b.)

$$\begin{aligned}\langle I(t)I(t')\rangle &= e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\tau\Gamma_{12}}\Gamma_{12}^{n}}{n!}\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_n\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\delta(t-t_l)\delta(t'-t_m)\\ &= e^2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\tau\Gamma_{12}}\frac{\Gamma_{12}^{n}}{n!}\left[\underbrace{\tau^{n-2}n(n-1)}_{\text{Terme mit } l\neq m}+\underbrace{\tau^{n-1}n\delta(t-t')}_{\text{Terme mit } l=m}\right]\\ &= e^2\Gamma_{12}^2+e^2\Gamma_{12}\delta(t-t') = \boxed{\langle I\rangle^2+e\langle I\rangle\delta(t-t')}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Stromfluktuationen (=“Rauschen”):

$$\langle\delta I(t)\delta I(t')\rangle = \langle\left(I(t)-\langle I\rangle\right)\left(I(t')-\langle I\rangle\right)\rangle = \langle I(t)I(t')\rangle-\langle I\rangle^2 = \boxed{\delta(t-t')e\langle I\rangle}$$

Hier: durch Diskretheit der Elektronenladung verursachte Fluktuationen = “Schrotrauschen”.

c.)

$$I(t) = e\left[\sum_{l=1}^{n_{12}}\delta\left(t-t_l^{(12)}\right)-\sum_{m=1}^{n_{21}}\delta\left(t-t_m^{(21)}\right)\right] = I_{12}-I_{21}$$

$$\langle\quad\rangle = \left[\sum_{n_{12}=0}^{\infty}\frac{e^{-\tau\Gamma_{12}}\Gamma_{12}^{n_{12}}}{n_{12}!}\int_0^\tau dt_1^{(12)}\ldots\int_0^\tau dt_{n_{12}}^{(12)}\right]\left[\sum_{n_{21}=0}^{\infty}\frac{e^{-\tau\Gamma_{21}}\Gamma_{21}^{n_{21}}}{n_{21}!}\int_0^\tau dt_1^{(21)}\ldots\int_0^\tau dt_{n_{21}}^{(21)}\right]$$

$\Rightarrow$ finde $\langle I\rangle = e\left[\Gamma_{12}-\Gamma_{21}\right]$

und

$$\langle I(t)I(t')\rangle = \langle I_{12}(t)I_{12}(t')\rangle + \langle I_{21}(t)I_{21}(t')\rangle - \langle I_{12}(t)I_{21}(t')\rangle - \langle I_{21}(t)I_{12}(t')\rangle$$

benutze (siehe b)

$$\langle I_{12}(t)I_{12}(t')\rangle = e^2\Gamma_{12}^2 + e^2\Gamma_{12}\delta(t-t')$$
$$\langle I_{21}(t)I_{21}(t')\rangle = e^2\Gamma_{21}^2 + e^2\Gamma_{21}\delta(t-t')$$

und

$$\langle I_{12}(t)I_{21}(t')\rangle = \langle I_{12}\rangle\langle I_{21}\rangle = e^2\Gamma_{12}\Gamma_{21} = \langle I_{21}(t)I_{12}(t')\rangle$$

so dass

$$\langle I(t)I(t')\rangle = e^2\left(\Gamma_{12}-\Gamma_{21}\right)^2 + e^2\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right)\delta(t-t') = \boxed{\langle I\rangle^2 + e^2\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right)\delta(t-t')}$$

$\Rightarrow$ Rauschen nicht mehr proportional zu $\langle I\rangle$; unkorrelierte Rauschquellen addieren sich!

d.)

Ohmscher Kontakt: $\langle I\rangle = \frac{V}{R} = e\left[\Gamma_{12}-\Gamma_{21}\right]$
detailliertes Gleichgewicht: $\Gamma_{12}/\Gamma_{21} = \exp\left(eV/kT\right)$
also

$$\frac{V}{eR} = \Gamma_{12}\left[1-\frac{1}{e^{\frac{eV}{kT}}}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma_{12} = \frac{V}{eR}\frac{e^{\frac{eV}{kT}}}{e^{\frac{eV}{kT}}-1}}$$

und

$$\boxed{\Gamma_{21} = \frac{V}{eR}\frac{1}{e^{\frac{eV}{kT}}-1}} \quad ; \quad \boxed{\Gamma_{12}+\Gamma_{21} = \frac{V}{eR}\coth\left(\frac{eV}{2kT}\right)}$$

$$\langle\delta I(t)\delta I(t')\rangle = \frac{eV}{R}\delta(t-t')\coth\left(\frac{eV}{2kT}\right) = e\langle I\rangle\coth\left(\frac{eV}{2kT}\right)\delta(t-t')$$
$$\Rightarrow \quad S(\omega) = 2e\langle I\rangle\coth\left(\frac{eV}{2kT}\right) \xrightarrow{kT\gg eV} \frac{4kT}{R}$$

d.h. thermisches (Nyquist) Rauschen eines Widerstands

2. Gaußverteilung für mehrere Variablen:

a.)

Wir betrachten die charakteristische Funktion

$$\phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) = \langle e^{i \sum_{j=1}^M \lambda_j \xi_j} \rangle$$

Es ergibt sich

$$\phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{M/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^M\xi \; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M \xi_i A_{ij} \xi_j + i \sum_{j=1}^M \lambda_j \xi_j}$$

Zur Berechnung des Integrals wird der Exponent mittels quadratischer Ergänzung (mehrdimensional !) umgeschrieben:

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M \xi_i A_{ij} \xi_j + i \sum_{j=1}^M \lambda_j \xi_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M \lambda_i G_{ij} \lambda_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M \lambda_i G_{ij} \lambda_j$$

mit $G_{ij} = [A^{-1}]_{ij}$.
Es gilt

$$A_{ij} = A_{ji} \quad \Rightarrow \quad G_{ij} = G_{ji}, \quad \sum_{j=1}^M A_{ij} G_{jk} = \delta_{ik}, \quad \sum_{j=1}^M G_{ij} A_{jk} = \delta_{ik}.$$

Die ersten drei Summanden können zusammengefasst werden zu

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M \left(\xi_i - i \sum_k \lambda_k G_{ki}\right) A_{ij} \left(\xi_j - i \sum_k G_{jk} \lambda_k\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M y_i A_{ij} y_j$$

mit $y_j = \xi_j - i \sum_k G_{jk} \lambda_k = \xi_j - i \sum_k \lambda_k G_{kj}$.
Wir erhalten somit schließlich

$$\phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) = \underbrace{\frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{M/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^M y \; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M y_i A_{ij} y_j}}_{=1 \quad \text{(Normierung)}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M \lambda_i G_{ij} \lambda_j}$$

$$\phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M \lambda_i G_{ij} \lambda_j} = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M \lambda_i [A^{-1}]_{ij} \lambda_j\right]$$

q.e.d.

b.)

Daraus ergibt sich

$$\langle \xi_i \rangle = \frac{1}{i} \frac{d}{d\lambda_i} \phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \Big|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_M = 0} = -\sum_{j=1}^{M} G_{ij} \lambda_j \Bigg|_{\lambda_j = 0} = 0$$

$$\begin{aligned}\langle \xi_i \xi_j \rangle &= -\frac{d^2}{d\lambda_i d\lambda_j} \phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \Big|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_M = 0} \\ &= \left[G_{ij} \ \phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) - \left(\sum_n G_{in} \lambda_n \right) \left(\sum_n G_{jn} \lambda_n \right) \phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \right] \Bigg|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_M = 0} = G_{ij}\end{aligned}$$

und

$$\langle \xi_i \xi_j \xi_k \xi_m \rangle = \frac{d^4}{d\lambda_i d\lambda_j d\lambda_k d\lambda_m} \phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \Big|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_M = 0} = G_{ij} G_{km} + G_{ik} G_{jm} + G_{im} G_{jk}$$

3. Gaußverteilung für zeitabh. stochastische Variablen:

a.)

Wir definieren $t_i = i\Delta t$, $\Delta t = \frac{\tau}{M}$, $i = 1, \ldots, M$ (wir können t_i auch um $\frac{\Delta t}{2}$ verschieben, das gibt dasselbe). Genau betrachtet erhalten wir damit das Intervall $[\Delta t, \tau]$ und nicht $[0, \tau]$, aber für große M verschwindet diese Diskrepanz. Integale diskretisieren wir folgendermaßen

$$\int_0^\tau dt f(t) \quad \rightarrow \quad \sum_i \Delta t \cdot f(t_i) \ .$$

Damit wird

$$\rho\left(\{\xi(t)\}\right) \sim e^{-\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{M} \xi(t_i)(\Delta t)^2 g^{-1}(t_i - t_j)\xi(t_j)}$$

Um die Verbindung zur diskreten Verteilungsfunktion aus Aufgabe 2 herzustellen, setzen wir

$$\xi_i = \xi(t_i), \quad A_{ij} = (\Delta t)^2 g^{-1}(t_i - t_j).$$

b.)

Wir führen die Bezeichnungsweisen $\langle A\rangle_c$ für die Mittelung mit der kontinuierliche Verteilungsfunktion, und $\langle A\rangle_d$ für die Mittelung mit der diskreten Verteilungsfunktion ein. Wir diskretisieren $\langle \exp\left[i\int_0^\tau dt\xi(t)\right]\rangle_c$, und erhalten $\langle \exp\left[i\Delta t\sum_{k=1}^{M}\xi_k\right]\rangle_d$. Aus Aufgabe 2 wissen wir jedoch, dass

$$\left\langle \exp\left[i\Delta t\sum_{k=1}^{M}\xi_k\right]\right\rangle_d = \exp\left[-\frac{(\Delta t)^2}{2}\sum_{ij=1}^{M}\langle\xi_i\xi_j\rangle_d\right].$$

Damit ergibt sich, nachdem wir auf der rechten Seite die Doppelsumme im Exponenten wieder durch ein Doppelintegral ersetzen, die gesuchte Beziehung:

$$\left\langle \exp\left[i\int_0^\tau dt\xi(t)\right]\right\rangle_c = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt'\langle\xi(t)\xi(t')\rangle_c\right].$$

c.)

Wir finden t_i am nächsten zu t und t_j am nächsten zu t'.
Da $\langle\xi_i\xi_j\rangle_d = G_{ij} = \left[A^{-1}\right]_{ij}$, benötigen wir A^{-1}.

Ein kurzer Ausflug in die Theorie der (linearen) Integralgleichungen:
Die Gleichung $x = Ky$ sei wie folgt zu verstehen:

$$x(r) = \int K(r, r')y(r')dr' \ , \tag{1}$$

wobei $K(r,r')$ der Integralkern ist. Die Lösung dieser Gleichung ist dann

$$y(r) = \int \bar{K}(r,r')x(r')dr' \ . \tag{2}$$

Mit $\bar{K} \equiv K^{-1}$ erhalten wir $y = K^{-1}x$. Also K^{-1} ist einfach das Inverse des Integralkerns.

Nun betrachten wir als definierende Gleichung für $g(t-t')$ folgenden Ausdruck (Beachte, dass $g^{-1}(t-t')$ nicht die Umkehrfunktion ist, wie man sie in Analysis I oder HM I kennenlernt...):

$$\int_0^\tau dt'' \ g^{-1}(t-t'')g(t''-t') = \delta(t-t').$$

Diskretisiert lautet diese Gleichung

$$\Delta t \sum_{j=1}^{M} g^{-1}(t_i - t_j)g(t_j - t_k) = \underbrace{\frac{\delta_{ik}}{\Delta t}}_{\text{(diskretisierte Deltafunktion)}}$$

Warum? Die diskretisierte Form der Deltafunktion, $\delta_D(t_i - t_j)$, erhält man aus der Normierung für die Deltafunktion:

$$\int_0^\tau dt \ \delta(t-t') = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \sum_{j=1}^{M} \underbrace{\delta_D(t_i - t_j)}_{\delta_{ij}/\Delta t} = 1.$$

Also folgt $\sum_{j=1}^{M} \left[g^{-1}\right]_{ij} g_{jk} = \delta_{ik}/(\Delta t)^2$. Da aber andrerseits $(\Delta t)^2 \left[g^{-1}\right]_{ij} = A_{ij} \Rightarrow \sum_{j=1}^{M} A_{ij} g_{jk} = \delta_{ik}$ ist, folgt $\left[A^{-1}\right]_{ij} = g_{ij} = g(t_i - t_j)$.
Damit erhalten wir die gesuchte Beziehung:

$$\underbrace{\langle \xi(t)\xi(t')\rangle_c}_{\text{“Korrelationsfunktion”}} = \underbrace{g(t-t')}_{\text{(Maß für Korrelationen)}} .$$

Näherung gut, wenn Δt klein gegenüber der Reichwerte der Korrelationen ist, d.h. $g(\Delta t) \approx g(0)$.