KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE | INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

Prof. Dr. G. Schön
Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke

03.06.2013
Bearbeitungszeit 120 min

---

1. Thermodynamische Potentiale: **11 Punkte**

Wir betrachten ein ideales Gas, beschrieben durch die Zustandsgleichung $PV = Nk_BT$. Als Funktion der Temperatur und des Volumens ist die innere Energie gegeben durch $U = C_VT$, mit einer konstanten Wärmekapazität C_V. (Hinweis: N wird konstant gehalten.)

(a) (3 Punkte) Zeigen sie, dass bei konstant gehaltenem Volumen die Innere Energie als Funktion der Entropie geschrieben werden kann als

$$U(S,V) = U_0(V)e^{(S-S_0)/C_V} . \tag{1}$$

(b) (3 Punkte) Zeigen sie, dass bei konstant gehaltener Entropie die Innere Energie als Funktion des Volumens geschrieben werden kann als,

$$U(S,V) = U_0(S)\left(\frac{V_0}{V}\right)^{Nk_B/C_V} . \tag{2}$$

(c) (1 Punkt) Zeigen sie nun, dass die innere Energie als Funktion von S und V gegeben ist durch

$$U(S,V) \;=\; U_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{C_P}{C_V}-1} \cdot \exp\left\{\frac{S-S_0}{C_V}\right\} .$$

Sie können dabei ohne Beweis die Relation $C_P - C_V = Nk_B$ verwenden.

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie daraus $S(U,V)$ und zeigen sie, dass gilt

$$S(U,V) = S_0 + Nk_B\ln\left[\left(\frac{U}{U_0}\right)^{C_V/Nk_B}\left(\frac{V}{V_0}\right)\right] . \tag{3}$$

(e) (3 Punkte) Berechnen Sie aus $U(S,V)$ die Helmholtzsche freie Energie $F(T,V)$.

2. Gaussverteilung in 2 Dimensionen: **7 Punkte**

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Oszillators in 2 Dimensionen,

$$\rho(x, y) = \frac{\sqrt{3}m\omega^2}{2k_BT\pi} \exp\left[-\frac{m\omega^2}{2k_BT}\vec{v}^T \mathbf{A}\vec{v}\right] \tag{4}$$

mit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

(a) (4 Punkte) Finden sie die Koordinaten $x' = x'(x, y)$ und $y' = y'(x, y)$ für die die Wahrscheinlichkeitsverteilung in zwei voneinander unabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilungen zerlegt werden kann, $\rho(x, y) = \rho_{x'}(x')\rho_{y'}(y')$.

(b) (3 Punkte) Berechnen sie die Mittelwerte $\langle x^2\rangle$ und $\langle y^2\rangle$.
Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-k^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{k} \quad , \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2\, e^{-k^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2k^3} \tag{6}$$

3. Langevin Gleichung: **7 Punkte**

Betrachten sie folgende Langevin-Gleichung für ein Brown'sches Teilchen:

$$m\dot{v} + m\gamma v = \xi(t) \tag{7}$$

dabei ist $\xi(t)$ eine Zufallskraft, die charakterisiert ist durch

$$\langle \xi(t)\rangle = 0 \ , \ \langle \xi(t)\xi(t')\rangle = ae^{-b|t-t'|} . \tag{8}$$

(a) (2 Punkt) Zeigen sie, dass

$$v(t) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' e^{\gamma(t'-t)}\xi(t') \tag{9}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (7) ist.

(b) (5 Punkte) Berechnen sie $\langle v(t)v(t')\rangle$ für $t > t'$. Benutzen sie hierzu die Lösung für $v(t)$ aus Aufgabenteil (a) und $t_0 \to -\infty$.

4. Dichte Matrix: **5 Punkte**

Betrachten Sie zwei Spin-1/2 Teilchen die Gleichverteilt sind auf die Triplett Zustände $|\psi_1\rangle = |++\rangle$, $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$, und $|\psi_{-1}\rangle = |--\rangle$.

(a) (3 Punkte) Schreiben Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ in der Basis von $|\sigma_1, \sigma_2\rangle$ d.h. $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, $|--\rangle$.

(b) (2 Punkte) Nehmen Sie nun an, dass uns nur der erste Spin als Messgrösse interessiert. Bestimmen Sie dessen reduzierte Dichtematrix, indem Sie den zweiten Spin 'ausspuren': $\rho^{\text{red}}_{\sigma_1,\sigma_1'} = \sum_{\sigma_2} \rho_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_1',\sigma_2}$.