Rechnung zum Vortrag Quantenelektrodynamik mit supraleitenden Schaltkreisen I

Iris Conradi

3. Juli 2012

Hamiltonoperator des Qubits:

$$H_Q = -2E_C(1-2N_g)\bar{\sigma}_z - \frac{E_J}{2}\bar{\sigma}_x \qquad N_g = \frac{C_g}{2e}V_g \tag{1}$$

wobei

$$E_C = \frac{e^2}{2C_\Sigma} \qquad N_g = \frac{C_g}{2e}V_g \quad . \tag{2}$$

Die Gatespannung besteht aus zwei Termen. Wir erhalten für die Ladung

$$N_g = N_g^{dc} + \frac{C_g}{2e}\sqrt{\frac{\hbar\omega_r}{cL}}(a^\dagger + a) \quad . \tag{3}$$

Das liefert im Hamiltonoperator des Qubits einen Kopplungsterm.

$$H_Q = -2E_C(1-2N_g^{dc})\bar{\sigma}_z - \frac{E_J}{2}\bar{\sigma}_x + e\frac{C_g}{C_\Sigma}\sqrt{\frac{\hbar\omega_r}{cL}}(a^\dagger + a)\bar{\sigma}_z \tag{4}$$

Diagonalisierung der ersten beiden Terme liefert

$$\begin{aligned} H &= H_R + H_Q \\ &= \hbar\omega_r \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + e\frac{C_g}{C_\Sigma}\sqrt{\frac{\hbar\omega_r}{cL}}\left(\cos\theta\sigma_z + \sin\theta\sigma_x\right)\left(a^\dagger + a\right) \ , \end{aligned} \tag{5}$$

wobei die Übergangsfrequenz und der Mischungswinkel gegeben sind durch

$$\omega_a = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\left(E_J \cos\frac{\pi\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right)^2 + \left(4E_C(1-2N_g^{dc})\right)^2} \tag{6}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{E_J}{4E_C(1-2N_g^{dc})}\right) \ . \tag{7}$$

Um den Kopplungsterm zu analysieren gehen wir über ins Wechselwirkungsbild.

$$U = \exp\left(i\omega_r(a^\dagger a + \frac{1}{2})t\right)\exp\left(i\frac{\omega_a}{2}t\sigma_z\right) \tag{8}$$

Nun Transformieren wir die einzelnen Terme.

$$U\sigma_x U^\dagger = e^{i\frac{\omega_a}{2}t\sigma_z}\sigma_x e^{-i\frac{\omega_a}{2}t\sigma_z} \tag{9}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_a}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_a}{2}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\omega_a}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\omega_a}{2}t} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{-\omega_a t} \\ e^{-i\omega_a t} & 0 \end{pmatrix} = e^{i\omega_a t}\sigma_+ + e^{-i\omega_a t}\sigma_- \tag{11}$$

$$U\sigma_z U^\dagger = \sigma_z \tag{12}$$

$$Ua^\dagger U = e^{i\omega_r a^\dagger a t}a^\dagger e^{-i\omega_r a^\dagger a t} \tag{13}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{\omega_r^n}{n!} t^n (a^\dagger a)^n a^\dagger e^{-i\omega_r a^\dagger a t} \tag{14}$$

$$= a^\dagger e^{i\omega_r a^\dagger a t}e^{-i\omega_r a^\dagger a t} = a^\dagger e^{i\omega_r t} \tag{15}$$

Für a finden wir entsprechend das hermitesch konjugierte. Die Rechnung für $a^\dagger$ wurde nicht vorgerechnet.

Somit finden wir für den Kopplungsterm im Wechselwirkungsbild

$$V_I = e\frac{C_g}{C_\Sigma}\sqrt{\frac{\hbar\omega_r}{cL}}\left(\cos\theta\sigma_z + \sin\theta\left(e^{i\omega_a t}\sigma_+ + e^{-i\omega_a t}\sigma_i\right)\right)\left(a^\dagger e^{i\omega_r t} + ae^{-i\omega_r t}\right) \tag{16}$$

$$= e\frac{C_g}{C_\Sigma}\sqrt{\frac{\hbar\omega_r}{cL}}\left[\cos\theta\sigma_z\left(a^\dagger e^{i\omega_r t} + ae^{-i\omega_r t}\right)\right. \tag{17}$$

$$\left. + \sin\theta\left(a^\dagger\sigma_+ e^{i(\omega_a+\omega_r)t} + a^\dagger\sigma_- e^{i(\omega_r-\omega_a)t} + a\sigma_+ e^{i(\omega_a-\omega_r)t} + a\sigma_- e^{-i(\omega_a+\omega_r)t}\right)\right] \tag{18}$$

Die Zeitskala auf der wir das System betrachten ist durch die Vakuum-Rabi-Oszillation gegeben. Die Frequenz dieser Oszillation ist proportional zur Kopplungsstärke g.
Es gilt $\omega_r \gg g$. Somit sind die Oszillationen mit ω_r und $\omega_r + \omega_a$ für unsere Betrachtung schnell. Im Rahmen einer Rotating Wave Approximation wir über die Periodendauern der schnellen Oszillationen gemittelt. Die Integrale über die Exponentialfunktionen werten zu Null aus. Es bleiben nur Terme mit der Differenzfrequenz überig. Eine Rücktransformatioin liefert den Jaynes-Cummings-Hamiltonoperator.

$$H = \hbar\omega_r\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar g\left(a^\dagger\sigma_- + \sigma_+ a\right) \tag{19}$$

mit

$$g = e\frac{C_g}{C_\Sigma}\sqrt{\frac{\hbar\omega_r}{cL}}\sin\theta\frac{1}{\hbar} \tag{20}$$

$$\omega_a = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\left(E_J\cos\frac{\pi\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right)^2 + \left(4E_C(1-2N_g^{dc})\right)^2} \tag{21}$$