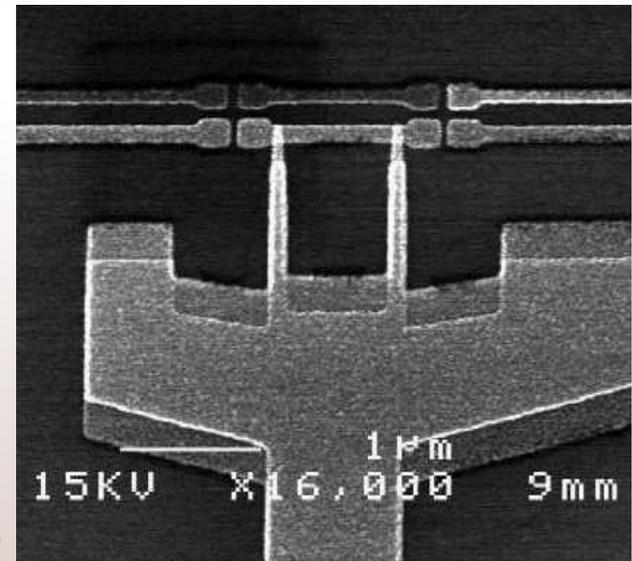
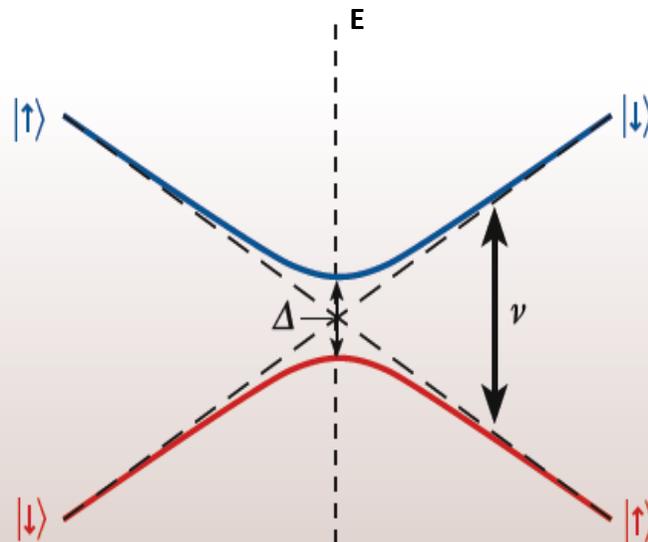
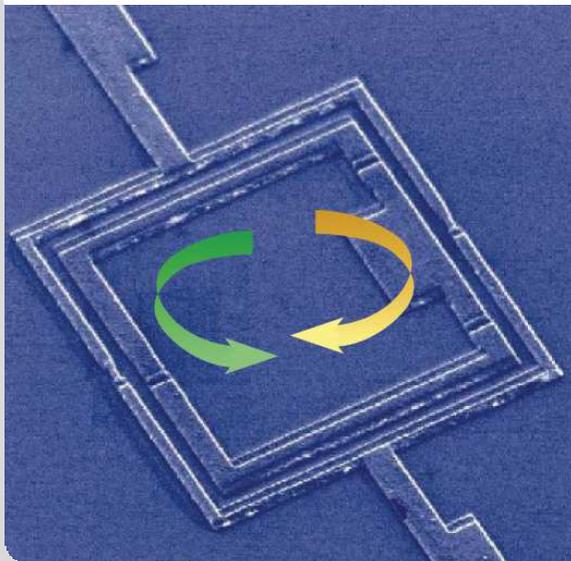


Quantencomputer mit supraleitenden Systemen

von Steven Weitemeyer

Hauptseminar: Physik des Quantencomputers
Institut für Theoretische Festkörperphysik (TFP)



■ Supraleitung

- Grundlagen
- Josephson-Kontakt

■ Supraleitende Schaltkreise

- rf-SQUID
- Quantisierung
- Single Cooper Pair Box (SCB)

■ Qubits

- Anforderungen
- Flux-Qubit
- Charge-Qubit

■ Experimentelle Realisierungen

■ Zusammenfassung

1.1 Supraleitung: Grundlagen

- Entdeckung 1911 durch *Heike Kamerlingh Onnes*
- Mikroskopische Beschreibung durch BCS-Theorie
(1957 von *John Bardeen*, *Leon N. Cooper* und *John R. Schrieffer*):
 - Attraktive Wechselwirkung über Kristall
 - Bosonische Cooper-Paare aus zwei Elektronen
 - makroskopische Wellenfunktion:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sqrt{n} e^{i\phi(\vec{r}, t)}$$

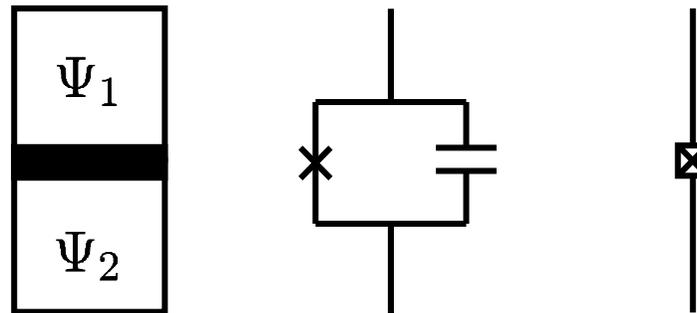
- Flussquantisierung:

$$\Phi = n * \Phi_0$$

$$\text{mit } \Phi_0 = \frac{h}{2e}$$

1.2 Supraleitung: Josephson-Kontakt

- Supraleiter – Isolator – Supraleiter



- 1. Josephson-Gleichung:

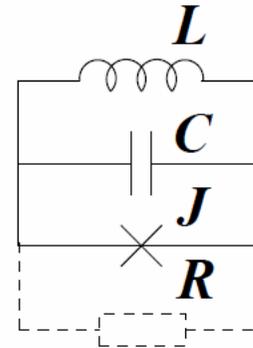
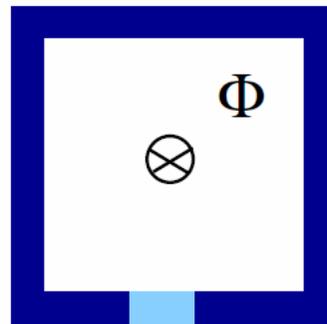
$$I_J = I_C \sin(\phi)$$

mit $\phi = \phi_2 - \phi_1$,
 I_C : kritischer
Josephson-Strom

- 2. Josephson-Gleichung:

$$\dot{\phi} = \frac{2eU}{\hbar}$$

2.1 Supraleitende Schaltkreise: rf-SQUID



Quelle: Wendin, 2006

- Kirchhoff-Regel:

$$\frac{\hbar^2 C}{4e^2} \ddot{\phi} + \frac{\hbar I_C}{2e} \sin(\phi) + \frac{\hbar^2}{4e^2 L} (\phi - \phi_e) = 0$$

2.1 Supraleitende Schaltkreise: rf-SQUID

- Kirchhoff-Regel:

$$\frac{\hbar^2}{2E_C} \ddot{\phi} + E_J \sin(\phi) + E_L(\phi - \phi_e) = 0$$

- Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

- Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\hbar^2}{4E_C} \dot{\phi}^2 - \underbrace{E_J(1 - \cos(\phi)) - \frac{E_L}{2}(\phi - \phi_e)^2}_{-V}$$

2.1 Supraleitende Schaltkreise: rf-SQUID

$$V = E_J(1 - \cos(\phi)) + \frac{E_L}{2}(\phi - \phi_e)^2$$

- Phase wie Teilchen im Potential
- steuerbar über äußeren Fluss ϕ_e
- Hamilton-Funktion:

$$\mathcal{H}(\dot{\phi}, \phi) = \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L} \quad \text{mit } p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \hbar n$$

$$\mathcal{H}(n, \phi) = E_C n^2 - E_J \cos(\phi) + \frac{E_L}{2}(\phi - \phi_e)^2$$

2.2 Supraleit. Schaltkreise: Quantisierung

- Hamilton-Operator:

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{n}, \phi) = E_C \hat{n}^2 - E_J \cos(\phi) + \frac{E_L}{2} (\phi - \phi_e)^2$$

- Kommutatorrelation:

$$[\phi, \hat{n}] = i$$

- Unschärfe-Relation für Fluss und Ladung

- Es folgt Klassifizierung:

$$E_C \ll E_J$$

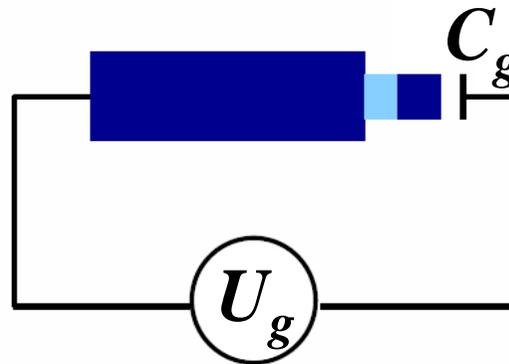
Flux Qubit



$$E_C \gg E_J$$

Charge Qubit

2.3 Supraleitende Schaltkreise: SCB



nach Wendin, 2006

■ Hamilton-Funktion:

$$\hat{\mathcal{H}} = E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos(\phi)$$

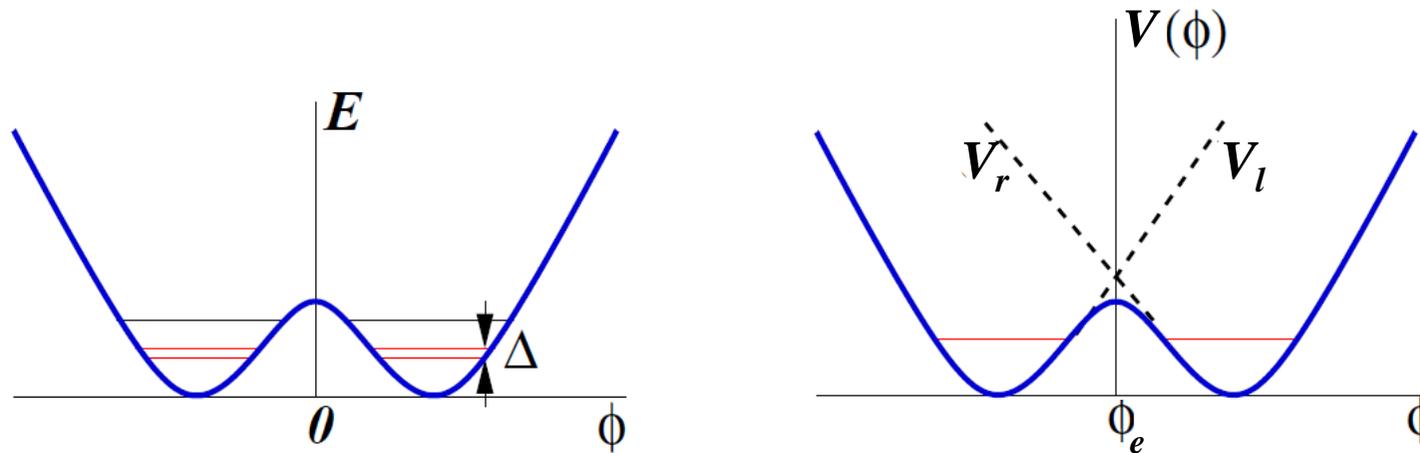
$$\text{mit } n_g = \frac{C_g U_g}{2e}$$

3.1 Qubits: Anforderungen

- klar definiertes 2-Zustandssystem
- universeller Satz an Gattern
 - σ_x und σ_z in Hamiltonian
 - Zeitliche Steuerung über resonante Mikrowellenpulse
- Auslese-Möglichkeiten
- Kopplungsmöglichkeiten

3.2 Qubits: Flux-Qubit

- symmetrisches Doppelmulden-Potential für $\phi_e = \pi$



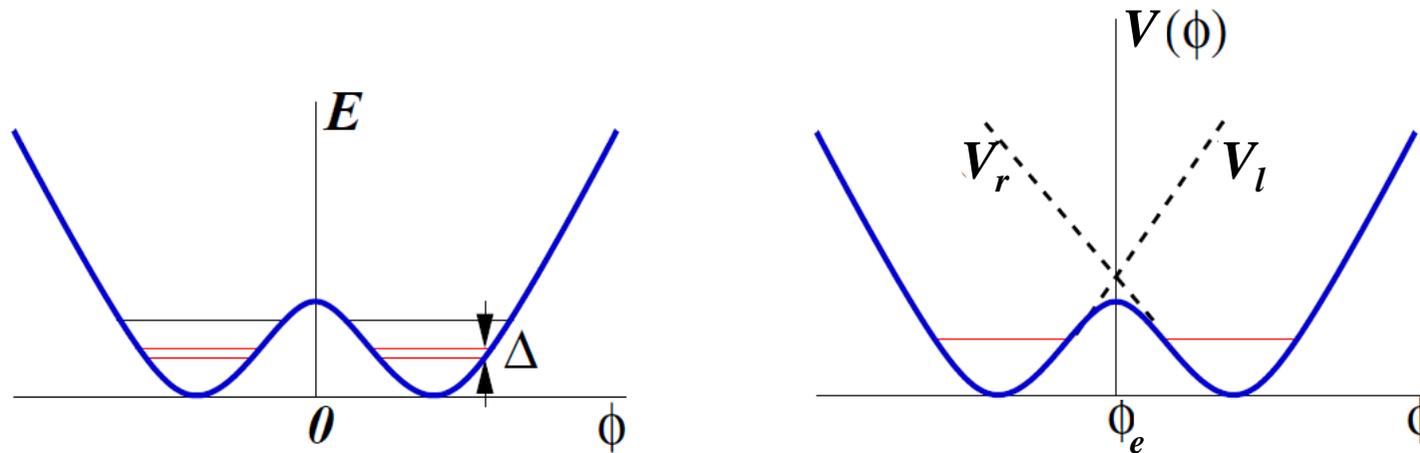
nach
Wendin, 2006

- nicht-äquidistante Energie-Level durch Josephson-Effekt
- vernachlässige Tunneln \rightarrow zweifache Entartung:

$|\ell\rangle$ - und $|r\rangle$ - fließender Strom (*Flux States*)

3.2 Qubits: Flux-Qubit

- symmetrisches Doppelmulden-Potential für $\phi_e = \pi$



nach
Wendin, 2006

- Tunnel-Rate steuert Level-Splitting Δ
- Asymmetrie des Potentials steuert Level-Splitting ε

3.2 Qubits: Flux-Qubit

- Projektion auf diese 2-Zustands-Basis liefert:

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}(\epsilon\sigma_z + \Delta\sigma_x) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta \\ \Delta & -\epsilon \end{pmatrix}$$

mit $\epsilon = E_r - E_l$ (steuerbar über ϕ_e)

mit Δ als Maß der Tunnelrate (abhängig von L und I_C)

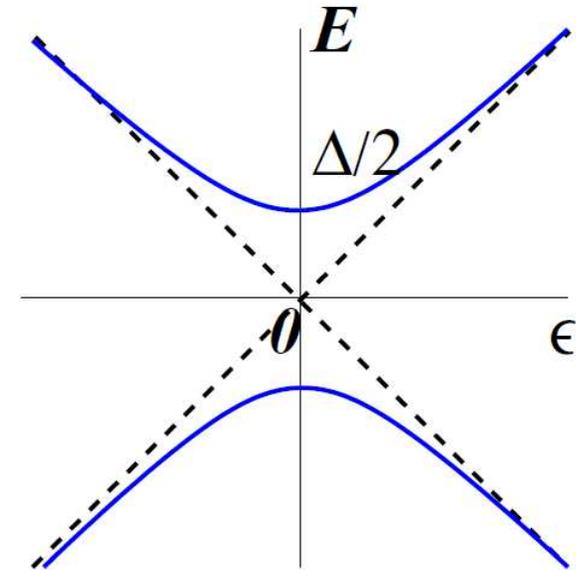
3.2 Qubits: Flux-Qubit

- Energiespektrum:

$$E_{1,2} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$$

- nahe $\phi_e = \pi$ sind die Eigenfunktionen die typischen *Cat States*:

$$|E_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|l\rangle \pm |r\rangle)$$

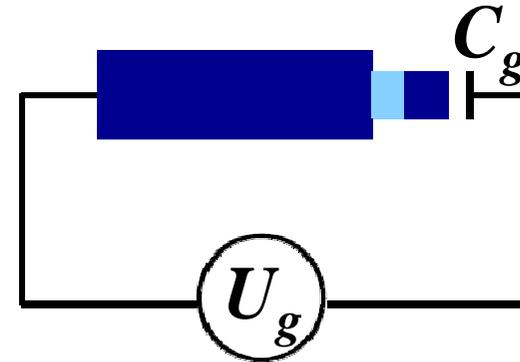


Quelle: Wendin, 2006

- weit entfernt haben wir praktisch reine *Flux States*
- *Sweet Spot* für $\phi_e = \pi$ (*Störungen* verschwinden in 1. Ord.)

3.3 Qubits: Charge-Qubit

$$\hat{\mathcal{H}} = E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos(\phi)$$



nach Wendin, 2006

- Entartung für $n_g = 0,5$ (ohne Tunneln):

$|0\rangle$: kein Cooper-Paar auf Insel $|1\rangle$: ein Cooper-Paar auf Insel

$$\text{mit } \hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$$

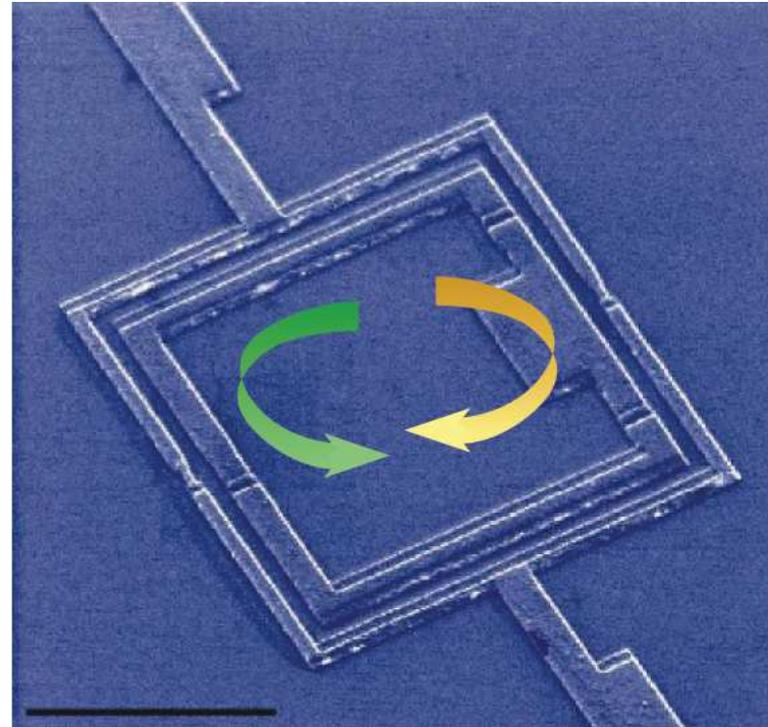
- analoger Hamiltonian:

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}(\epsilon\sigma_z + \Delta\sigma_x) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta \\ \Delta & -\epsilon \end{pmatrix}$$

mit $\Delta = E_J$ und $\epsilon = E_C(1 - 2n_g)$ (steuerbar über U_g)

4. Experimentelle Realisierungen

- 3 Josephson-Kontakte für bessere Einstellung der Potentialbarriere
- Umrandung: dc-SQUID zur Messung des Qubit-Zustandes
- Basis wie bei einfachem Flux-Qubit

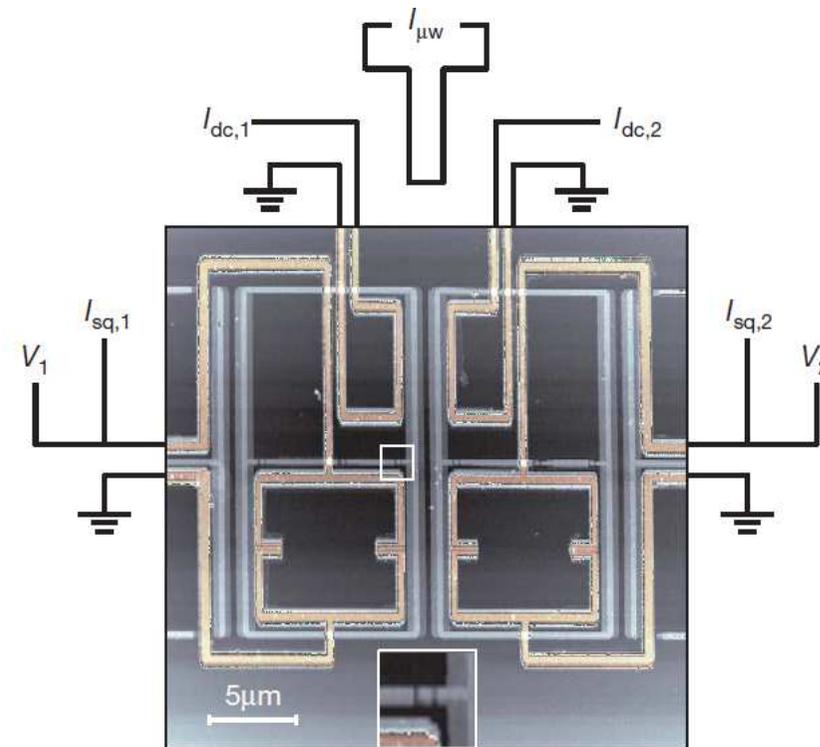


Quelle: C. H. van der Wal, Groningen

4. Experimentelle Realisierungen

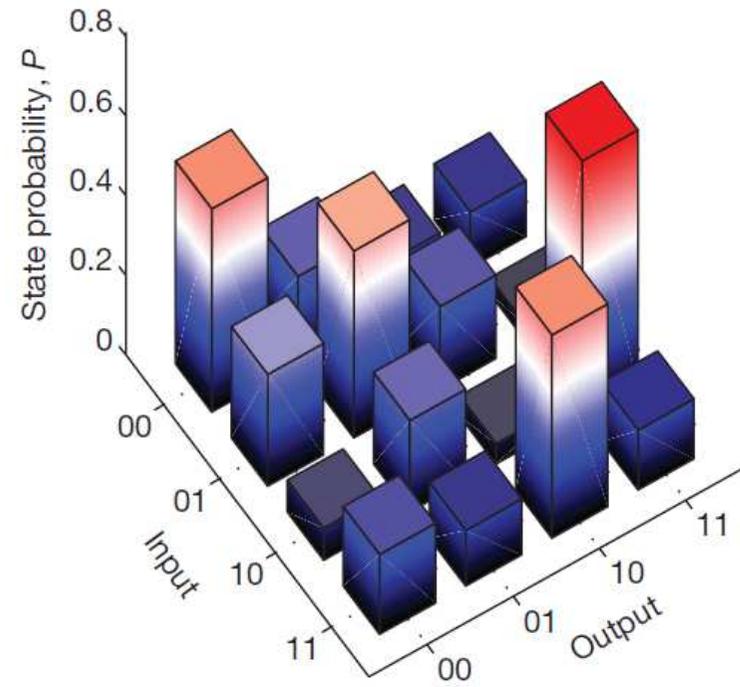
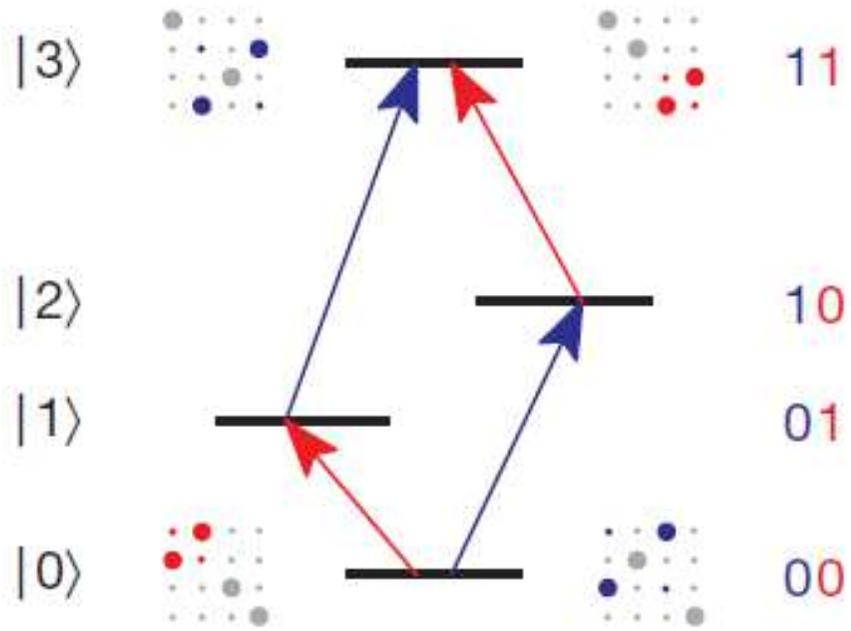
- zwei gekoppelte Flux-Qubits
- Kopplung über Magnetfeld
⇒ 4-Level-System
- Qubit-Zustand wird über resonanten Mikrowellen-Puls manipuliert
- Hamiltonian:

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}(\epsilon_1\sigma_z^1 + \Delta_1\sigma_x^1 + \epsilon_2\sigma_z^2 + \Delta_2\sigma_x^2) + J\sigma_z^1\sigma_z^2$$



Quelle: Plantenberg, 2007

4. Experimentelle Realisierungen



$$M_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quelle: Plantenberg, 2007

5. Zusammenfassung

- Josephson-Kontakte \Rightarrow nicht-lineare Energieniveaus
- Unschärfe Phase vs. Ladung \Rightarrow Flux- vs. Charge-Qubit
- charakteristischer 2-Zustands-Hamiltonian:

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}(\epsilon\sigma_z + \Delta\sigma_x) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta \\ \Delta & -\epsilon \end{pmatrix}$$

- einfache Kontrolle durch äußere Felder auf ϵ und Δ
- einfache Kopplung \leftrightarrow starke Dekohärenz

- G. Wendin & V.S. Shumeiko, *Superconducting Quantum Circuits, Qubits and Computing*, Gothenburg (2006)
- J. H. Plantenberg et al., *Demonstration of controlled-NOT quantum gates on a pair of superconducting quantum bits*, *nature* Vol 447 (2007)
- John Clarke & Frank K. Wilhelm, *Superconducting quantum bits*, *nature* Vol 453 (2008)
- Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik, 14. Auflage*, Oldenburg Verlag München Wien (2006)
- Antonio Barone & Gianfranco Paterno, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, John Wiley & Sons (1982)