Wir betrachten ein 2-Niveau-Atom in einem harmonischen Potential unter Wechselwirkung mit einem Laser in Resonanz.

Der Hamiltonoperator besteht aus 3 Anteilen:

$$H = H^{(e)} + H^{(m)} + H^{(l)}$$

Das 2-Niveau-Atom besteht aus den zwei Niveaus $|g\rangle$ (Grundzustand) und $|e\rangle$(angeregter Zustand) mit den Energien $\hbar\omega_g$ und $\hbar\omega_e$. Die Übergangsenergie beträgt $\hbar\omega_0 = \hbar\omega_e - \hbar\omega_g$.

$$H^{(e)} = \hbar\omega_g|g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e|e\rangle\langle e| = \frac{\hbar\omega_e + \hbar\omega_g}{2}(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) + \frac{\hbar\omega_0}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)$$

Wir können jedes 2-Niveau-System als Spin-System auffassen und mithilfe der Pauli-Matrizen beschreiben:

$$(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \to I$$

$$(|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|) \to \sigma_x$$

$$i(|g\rangle\langle e| - |e\rangle\langle g|) \to \sigma_y$$

$$(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \to \sigma_z$$

Damit ergibt sich:

$$H^{(e)} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z$$

Zur Vereinfachung nehmen wir für die Bewegung der Ionen in der Ionenfalle einen eindimensionalen, statischen, quantenmechanischen harmonischen Oszillator an:

$$H^{(m)} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2 x^2}{2} = \hbar\omega_1\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega_1\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Wir betrachten die Wechselwirkung mit einem elektrischen Feld:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0(e^{i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx-\omega t)})$$

Die Dipolwechselwirkung (mit dem Dipolmoment $\vec{d}$) berechnet sich mit dem folgenden Hamiltonian:

$$H_D = -\vec{d}\cdot\vec{E}(x,t)$$

Wir führen die Rabi-Frequenz $\Omega = -\frac{2}{\hbar}\langle g|\vec{d}\cdot\vec{E}_0|e\rangle$ ein. Das Problem lässt sich damit auch auf andere Wechselwirkungen erweitern.

$$\begin{aligned} H^{(l)} &= \frac{\hbar\Omega}{2}(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)\left[e^{i(kx_s-\omega t+\phi)} + e^{-i(kx_s-\omega t+\phi)}\right] \\ &= \frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma_+ + \sigma_-)\left[e^{i(kx_s-\omega t+\phi)} + e^{-i(kx_s-\omega t+\phi)}\right] \end{aligned}$$

Wir betrachten den Hamiltonian $H^{(l)}$ im Wechselwirkungsbild mit $U = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}$ wobei $H_0 = H^{(e)} + H^{(m)}$:

$$H_I = U^\dagger H^{(l)} U = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} H^{(l)} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}$$
$$= e^{\frac{i\omega_0 t}{2}\sigma_z} \frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma_+ + \sigma_-)\ e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}\sigma_z} \cdot e^{i\omega_1 a^\dagger a}\left[e^{i(kx_s-\omega t+\phi)} + e^{-i(kx_s-\omega t+\phi)}\right] e^{-i\omega_1 a^\dagger a}$$

Der erste Term lässt sich mit der Relation $U^\dagger \sigma_\pm U = \sigma_\pm e^{\pm i\omega_0 t}$ vereinfachen. Der zweite Term entspricht einer Transformation von $x_s = x_0(a^\dagger + a)$ mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ ins Heisenbergbild $x(t) = x_0(a \cdot e^{-i\omega_1 t} + a^\dagger \cdot e^{i\omega_1 t})$

$$H_I = \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_+ e^{i\omega_0 t} + \sigma_- e^{-i\omega_0 t}\right)\left[e^{i\left(kx_0(a\cdot e^{-i\omega_1 t}+a^\dagger\cdot e^{i\omega_1 t})-\omega t+\phi\right)} + e^{-i\left(kx_0(a\cdot e^{-i\omega_1 t}+a^\dagger\cdot e^{i\omega_1 t})-\omega t+\phi\right)}\right]$$

Wir vernachlässigen die schnell oszillierenden Terme mit $\omega + \omega_0$ (Rotating Wave Approximation) und führen $\Delta = \omega - \omega_0$ und den Lamb-Dicke-Parameter $\eta = kx_0$ ein:

$$H_I \cong \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_+ e^{-i(\Delta t-\phi)} e^{i\eta(a\cdot e^{-i\omega_1 t}+a^\dagger\cdot e^{i\omega_1 t})} + \sigma_- e^{i(\Delta t-\phi)} e^{-i\eta(a\cdot e^{-i\omega_1 t}+a^\dagger\cdot e^{i\omega_1 t})}\right)$$

Wir verwenden die Näherung $\eta\sqrt{\langle(a+a^\dagger)^2\rangle} \ll 1$ und entwickeln die Exponentialfunktion:

$$H_I \cong \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\left(\sigma_+ e^{-i(\Delta t-\phi)} + \sigma_- e^{i(\Delta t-\phi)}\right) + i\,\eta(\sigma_+ e^{-i(\Delta t-\phi)} - \sigma_- e^{i(\Delta t-\phi)})\left(a\cdot e^{-i\omega_1 t} + a^\dagger \cdot e^{i\omega_1 t}\right)\right)$$

Wir führen eine zweite Rotation Wave Approximation durch, indem wir die zeitabhängigen Terme vernachlässigen und betrachten 3 Fälle:

1) $\Delta = 0$: Der sogenannte Transport-Übergang beschreibt die direkten Übergänge zwischen $|g\rangle$- und $|e\rangle$-Niveaus

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_+ e^{i\phi} + \sigma_- e^{-i\phi}\right)$$

2) $\Delta = \omega_1$: Der sogenannte blaue Seitenband-Übergang, bei dem mit der Anregung des Ions ein Phonon erzeugt wird:

$$H = \frac{i\hbar\Omega\eta}{2}\left(\sigma_+ a^\dagger e^{i\phi} - \sigma_- a e^{-i\phi}\right)$$

3) $\Delta = -\omega_1$: Der sogenannte rote Seitenband-Übergang, bei dem mit der Anregung des Ions ein Phonon vernichtet wird:

$$H = \frac{i\hbar\Omega\eta}{2}\left(\sigma_+ a e^{i\phi} + \sigma_- a^\dagger e^{-i\phi}\right)$$