- Physik des Quantencomputer - Hauptseminar

Josephson Bifurcation amplifier - Rechnung zum Vortrag

Fabian Trost

7. August 2012

Vorbereitung

Wir wollen zeigen, dass es für bestimmte treibende Kräfte verschiedene stabile Lösungen (maximale Amplituden) gibt.
Wir gehen von folgendem Hamiltonian aus

$$H = \hbar\omega_r a^\dagger a + \frac{\hbar K}{12}\left(a + a^\dagger\right)^4 - \hbar f \cos(\omega_d t)\left(a + a^\dagger\right) \tag{1}$$

Wir nehmen eine Transformation in ein rotierendes Bezugssystem vor. Dazu verwenden wir folgende unitäre Transformation vor:

$$\tilde{H} = UHU^\dagger - \hbar\Delta\omega a^\dagger a \tag{2}$$

$$U = e^{i\omega_d a a^\dagger} \tag{3}$$

mit $\Delta\omega := \omega_d - \omega_r$.
Es gilt $UaU^\dagger = ae^{-i\omega_d t}$ und $Ua^\dagger U^\dagger = a^\dagger e^{i\omega_d t}$. Damit folgt:

$$\tilde{H} = -\hbar\Delta\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar K\left(ae^{-i\omega_d t} + a^\dagger e^{i\omega_d t}\right)^4 - \frac{1}{2}\hbar f\left(ae^{-i\omega_d t} + a^\dagger e^{i\omega_d t}\right)\left(e^{-i\omega_d t} + e^{i\omega_d t}\right) \tag{4}$$

Nach ausmultiplizieren und unter Verwendung der Rotating wave approximation (also dem Vernachlässigen von schnell rotierenden Thermen) erhalten wir:

$$\tilde{H} \approx -\hbar\Delta\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar K\left[a^\dagger a\left(a^\dagger a + 1\right)\right] - \frac{1}{2}\hbar f\left(a^\dagger a\right) \tag{5}$$

Bestimmung der maximalen Amplitude

Wir machen folgende Definitionen:

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\left(a + a^\dagger\right) \tag{6}$$

und

$$\hat{P} = -i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\left(a - a^\dagger\right) \tag{7}$$

mit $\lambda := \frac{K}{2\Delta\omega}$.

Erinnerung: wir befinden uns in einem rotierenden Bezugssystem.
im Laborsystem würde sich mit unseren Definitionen von $\hat{P}$ und $\hat{Q}$ folgendes ergeben:

$$\left(a + a^\dagger\right)_{Lab.Sys.} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\left(\hat{Q}\cos(\omega_d t) + \hat{P}\sin(\omega_d t)\right) \tag{8}$$

Man kann leicht erkennen, dass $\hat{P}$ und $\hat{Q}$ die maximale Amplitude (im Fall des Resonators das E - bzw. B - Feld) unseres Oszillators repräsentieren.

Wir erhalten folgende Form unseres Hamiltonian:

$$\tilde{H} - \frac{\hbar}{\lambda}\Delta\omega\left[-\frac{1}{4}\left(\hat{Q}^2 + \hat{P}^2\right) + \sqrt{\beta}\hat{Q}\right] \tag{9}$$

mit $\beta = \frac{f^2 K}{4\Delta\omega^3}$.

Wir verwenden die semiklassische Näherung ($< AB > \approx < A >< B >$ also für uns z.B. $< Q^2 > \approx < Q >^2$). Damit stellen wir nun die Bewegungsgleichungen für Q und P auf:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \Delta\omega P(Q^2 + P^2 - 1) \tag{10}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\Delta\omega\left[P(Q^2 + P^2 - 1) - \sqrt{\beta}\right] \tag{11}$$

Wir suchen eine stabile Lösung also $\dot{Q} = \dot{P} = 0$.

$$\Delta\omega P(Q^2 + P^2 - 1) = -\Delta\omega\left[P(Q^2 + P^2 - 1) - \sqrt{\beta}\right] = 0 \tag{12}$$

Setzen wir $P = 0$ folgt:

$$Q(Q^2 - 1) = -\sqrt{\beta} \tag{13}$$

Wir sehen, in Abbildung 1, dass drei Lösungen für $0 \leq \beta \leq \frac{4}{27}$ existieren ansonsten gibt es nur eine einzige Lösung.

0.1 Stabilität der Lösungen

Wir interessieren uns vor allem für den Bereich $0 \leq \beta \leq \frac{4}{27}$ und wollen prüfen ob alle drei Lösungen "stabil" sind. Unter Stabilität verstehen wir hier, dass wenn wir an Q etwas rütteln, dieses wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehrt bzw. um diese oszilliert. Daher entwickeln wir H um den Punkt Q_0 und $P_0 = 0$.

Einschub: Wiederholung Taylorentwicklung: (hier bis zur 2. Ordnung)

$$T_{\vec{a}}(\vec{x}) = f(\vec{a}) + (\vec{x} - \vec{a})^\top \nabla f(\vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{a})^\top H_f(\vec{x} - \vec{a}) + \mathcal{O}(x^3) \tag{14}$$

Wir entwickeln also H bis zur zweiten Ordnung:

$$H(Q, P) \approx H(Q_0, 0) + (Q - Q_0, P)\nabla H + \frac{1}{2}(Q - Q_0, P)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial Q \partial P} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial P \partial Q} & \frac{\partial^2 H}{\partial P^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q - Q_0 \\ P \end{pmatrix} \tag{15}$$

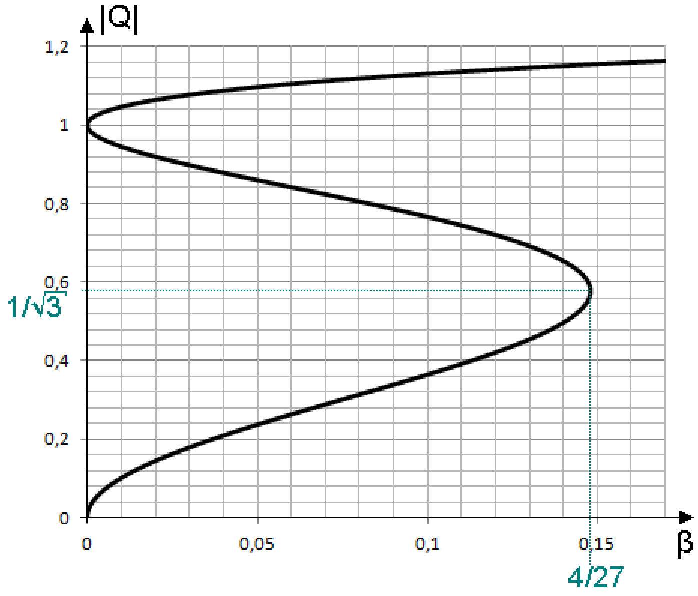

Abbildung 1: Q aufgetragen über die reduzierte treibende Kraft (β)

Unter der Voraussetzung, dass $\dot{P} = \dot{Q} = 0$ gilt $\nabla H = 0$ wir erhalten also:

$$H(Q,P) \approx -\frac{1}{4}(Q_0^2 - 1)^2 + \sqrt{\beta} Q_0 - \frac{1}{2}(Q - Q_0)^2(-3Q_0^2 + 1) + \frac{1}{2}P^2(Q_0^2 - 1) \tag{16}$$

Wir erhalten nun $\dot{Q}$ durch $\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = (Q_0^2 - 1)P$ und $\ddot{Q} = (Q_0^2 + 1)\dot{P}$.
Nach einsetzen erhalten wir:

$$\ddot{Q} = -(3Q_0^2 - 1)(Q_0^2 - 1)(Q - Q_0) = -f(Q_0)(Q - Q_0) \tag{17}$$

Damit nun Q um Q_0 schwingt, also der Zustand stabil ist, muss $f(Q_0) \geq 0$. In Abbildung 2 sehen wir, dass dies genau für $Q \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $Q \geq 1$ zutrifft. Es gibt also für $0 \leq \beta \leq \frac{4}{27}$ genau zwei stabile Lösungen.

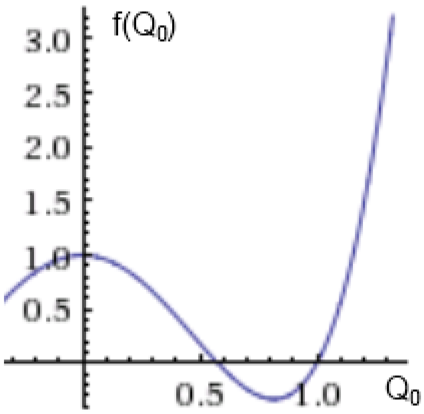

Abbildung 2: $f(Q_0)$