# Dissipation in gekoppelten Qubit-Oszillator-Systemen

Stephan André

Diplomarbeit

am Institut für Theoretische Festkörperphysik
Universität Karlsruhe

**Referent:** **Prof. Dr. Gerd Schön**
Institut für Theoretische Festkörperphysik
Universität Karlsruhe

**Korreferent:** **Prof. Dr. Alexander Shnirman**
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Universität Karlsruhe

24. September 2008

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

Supraleitende Stromkreise mit Josephson-Kontakten können trotz ihrer makroskopischen Dimensionen quantenmechanisches Verhalten zeigen [1]. Aus diesem Grund wurden sie in den letzten Jahrzehnten intensiv untersucht. Unter bestimmten Voraussetzungen lassen sie sich durch wenige makroskopische, quantenmechanische Freiheitsgrade beschreiben. Viele Experimente haben sich der Untersuchung von quantenmechanischen Phänomenen in diesen Stromkreisen gewidmet. Zu den wichtigen Durchbrüchen gehört die Beobachtung von makroskopischem Quanten-Tunneln [2, 3] (MQT) und der Quantisierung der Energie [4]; weiterhin konnten Superpositionen von Zuständen nachgewiesen werden [5, 6, 7].

Ein Grund für das große Interesse an supraleitenden Stromkreisen mit Josephson-Kontakten ist ihre potentielle Verwendung in der Quanteninformationsverarbeitung [8]. Das ehrgeizigste Ziel der Quanteninformation stellt der Bau eines Quantencomputers dar. Im Gegensatz zu herkömmlichen Computern benutzen letztere keine klassischen Bits, sondern sog. Qubits, quantenmechanische Zwei-Zustands-Systeme, als Grundbausteine. Ein Quantencomputer könnte Aufgaben übernehmen, die weit jenseits der Möglichkeiten heutiger Rechner liegen [9], z.B. die Zerlegung einer großen Zahl in Primzahlen, was bei der Verschlüsselung von Daten eine zentrale Bedeutung hat.

Zurzeit gibt es mehrere physikalische Systeme, die zur Realisierung von Qubits in Frage kommen, und von denen jedes seine Vor- und Nachteile hat. Letzteres misst sich daran, inwieweit ein System den *Di Vincenzo-Kriterien* genügt [10]. Dazu gehört eine lange Kohärenzzeit und die Möglichkeit, den Zustand von Qubits gezielt zu manipulieren. Mögliche Kandidaten stellen neben supraleitenden Qubits z.B. auch Ionen in elektrischen Fallen, Kernspins und Cavity-QED-Systeme dar [11].

Supraleitende Qubits haben den großen Vorteil, dass sie einfach in elektrische Schaltungen integrierbar und prinzipiell zu großen Systemen hin skalierbar sind [12]. Weiterhin gelten sie als flexibel, da sich ihre Eigenschaften leicht durch äußere Parameter steuern lassen und man die Kopplung zwischen Qubits gezielt ein- und ausschalten kann. Diese große Flexibilität hat jedoch auch eine erheblichen Kopplung an die elektromagnetische Umgebung zur Folge, was zu kurzen Kohärenzzeiten führt. Supraleitende Qubits werden durch verschiedenen Arten des Rauschen beeinträchtigt, darunter $1/f$-Rauschen: Damit bezeichnet man niederfrequentes Rauschen, das beispielsweise von langsamen Fluktuationen von Hintergrundladungen herrührt und maßgeblich zur Dekohärenz beiträgt [13].

Die Kopplung eines Qubits an ein quantenmechanisches elektromagnetisches Feld führt zum Gebiet der Circuit-Quantenelektrodynamik (Circuit QED). Der Name lehnt sich an die Cavity-QED an, wo die Wechselwirkung zwischen einem einzelnen Atom und einem Photon untersucht wird. In der Circuit QED übernimmt ein supraleitendes Qubit die Rolle des Atoms; als Resonator dient beispielsweise ein 1-dimensionaler Wellenleiter oder ein LC-Schwingkreis.

Aufgrund des großen effektiven Dipolmoments von sog. *künstlichen Atomen* lässt sich in Circuit-QED-Systemen der Bereich der starken Kopplung relativ leicht erreichen; infolgedessen gelang in einer Reihe von Experimenten die Beobachtung von quantenoptischen Phänomenen [14, 15, 16, 17, 18]. Für Qubit-Oszillator-Systeme gibt es viele Anwendungsmöglichkeiten: Sie können verwendet werden, um Qubits zu koppeln [19, 20], um einzelne Photonen zu erzeugen [21] oder Messungen an Qubits durchzuführen.

Eine weitere Anwendung sind *Single-Qubit-Laser* [22, 23]. Dabei wird im Qubit durch einen Pumpmechanismus eine Inversion erzeugt (der angeregte Zustand stärker bevölkert als der Grundzustand); aufgrund der starken Kopplung kann dies zu einer deutlichen Erhöhung der Photonenzahl im Resonator führen. In *Single-Qubit-Coolern* wird ein ähnlicher Mechanismus ausgenutzt, um den Resonator zu kühlen [23]. Das Qubit führt dabei Energie vom Resonator an seine Umgebung ab.

Die vorliegende Diplomarbeit ist durch zwei Experimente motiviert, in denen Single-Qubit-Laser realisiert werden konnten. Das erste Experiment wurde an den

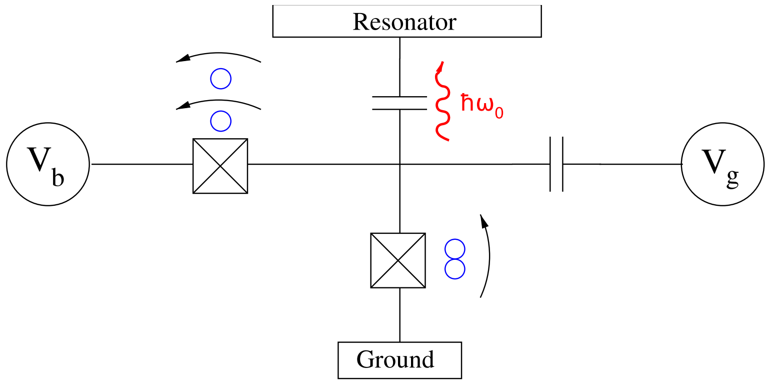


Abbildung 1.1: Schematischer Aufbau des SSET-Experiments: In Anwesenheit einer Spannung $V_b$ findet Einzel-Elektron-Tunneln statt. Über einen zweiten Josephson-Kontakt können Cooper-Paare auf die supraleitende Insel nachtunneln. Die überschüssige Energie bei diesem Zyklus fließt in den Resonator.

*NEC Nano Electronics Research Laboratories* in Japan durchgeführt [22]. Der Aufbau ist in Abbildung 1.1 skizziert. Als künstliches Atom fungiert dabei ein Ladungs-Qubit, dessen Energieaufspaltung durch eine äußere Gate-Spannung $V_g$ kontrolliert wird. Bei hinreichend niedrigen Temperaturen spielen nur die Ladungszustände $|0\rangle$ und $|2\rangle$ eine Rolle, die sich um ein Cooper-Paar unterscheiden. Das Qubit ist kapazitiv an einen Wellenleiter mit einer Resonanzfrequenz $\omega_0/2\pi \approx 10$ GHz gekoppelt.

Der Pumpmechanismus entsteht durch das Anbringen einer weiteren Elektrode an die supraleitende Insel. In Anwesenheit einer Spannung $V_b$ zerfällt dabei der Zustand $|2\rangle$ durch zweimaliges inkohärentes Einzel-Elektron-Tunneln in den Zustand $|0\rangle$. Wenn die Ladungszustände die gleiche Energie haben, vervollständigt kohärentes Josephson-Tunneln anschließend den sog. Josephson Quasiteilchen-Zyklus (JQP-Zyklus).

Durch Verändern der Gate-Spannung kann das Ladungs-Qubit in Resonanz mit dem Wellenleiter gebracht werden. Bei geeigneter Wahl der Parameter entspricht der angeregte Zustand des Qubits ungefähr dem Ladungszustand $|0\rangle$; das Einzel-Elektron-Tunneln bewirkt somit eine Inversion im Qubit. Letzteres kann nun durch Abgabe eines Energiequants an den Resonator in den Zustand $|2\rangle$ zurückkehren, während sich die Photonenzahl im Resonator um 1 erhöht. Dieser Photon-unterstützte JQP-Zyklus sorgt für das beobachtete laserartige Verhalten.

Im Experiment wurde die vom Resonator emittierte Strahlung gemessen. Dabei wurde im Bereich der Ein-Photon-Resonanz eine starke Erhöhung der Strahlungs-

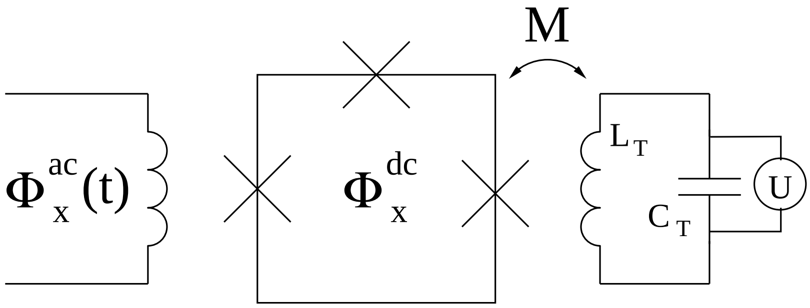


Abbildung 1.2: Schematischer Aufbau des Jena-Experiments: Ein äußeres Magnetfeld treibt das Qubit zu Rabi-Oszillationen. Diese langsamen Rabi-Oszillationen sind in Resonanz mit dem LC-Schwingkreis und führen zu einer Erhöhung der Spannungsfluktuationen.

leistung im Vergleich zum nichtresonanten Fall beobachtet. Die Zahl der Photonen im laserartigen Zustand wurde auf $\approx 30$ eingeschätzt, während die thermische Photonenzahl (weit außerhalb der Resonanz) unterhalb 1 lag. Gleichzeitig wurde eine deutliche Verringerung der Linienbreite des Resonators gemessen.

In einem weiteren Versuch wurde der Resonator durch ein äußeres Signal angetrieben. Dieses *injection locking* genannte Verfahren dient dazu, die Phase der emittierten Strahlung zu fixieren und die Linienbreite des Lasers weiter zu verringern. Der Einfluss des Qubits in Resonanz war auch hier deutlich in einer Verstärkung des Signals sowie einer Verschiebung der Phase zu beobachten.

Das zweite Experiment wurde in Jena durchgeführt [24] und ist in Abbildung 1.2 dargestellt. In diesem Fall wird ein Fluss-Qubit verwendet. Der Resonator ist ein LC-Schwingkreis, der induktiv an das Fluss-Qubit gekoppelt ist. Die Besonderheit des Experiments liegt darin, dass die Frequenz des Resonators $\omega_0/2\pi \approx 6$ MHz sehr viel kleiner ist als die Frequenz des Qubits $\Delta E/2\pi \approx 1$ GHz, so dass keine direkte Resonanz zwischen beiden erreicht wird. Stattdessen wird das Qubit durch ein äußeres Magnetfeld zu Rabi-Oszillationen getrieben. Die Grundidee besteht darin, diese langsamen Rabi-Oszillationen in Resonanz mit dem Oszillator zu bringen.

Der Inversionsmechanismus entsteht durch das Zusammenspiel von Antrieb und Relaxation des Qubits. Die gemeinsamen Eigenzustände des Qubits und des treibenden Feldes, die durch die Rabi-Frequenz getrennt sind, unterliegen Anregungs- und Relaxationsprozessen, wobei die jeweiligen Raten von der Antriebsfrequenz $\omega_d$

abhängig sind [25]. Bei blauer Verstimmung, d.h. für $\omega_d > \Delta E$, ist die Anregungsrate größer als die Relaxationsrate, somit kommt es zu einer Inversion. Physikalisch gesehen liefert das treibende Feld mehr Energie als nötig, um das Qubit anzuregen; die überschüssige Energie fließt in den Oszillator.

Bei diesem Experiment wurden die Spannungsfluktuationen am LC-Schwingkreis gemessen. Im ungekoppelten Fall war das Spektrum der Fluktuationen durch eine einfache Lorentzkurve um die Resonanzfrequenz $\omega_0$ gegeben. Die Anwesenheit des getriebenen Qubits führte hier zu einer deutlichen Erhöhung dieser Resonanzkurve, was ein Hinweis auf einen Anstieg der Photonenzahl im Oszillator ist. Das Experiment wurde später in einem anderen Parameterbereich wiederholt [23]; auch hier war eine Erhöhung der Resonanzkurve zu beobachten, begleitet von einer Verringerung der Linienbreite.

Beide Experimente zeigen, dass laserartiges Verhalten in gekoppelten Qubit-Oszillator-Systemen erreicht werden kann. Single-Qubit-Laser haben dabei viele Gemeinsamkeiten mit Cavity-QED Systemen, arbeiten aber in einem verschiedenen Parameterbereich. Ein großer Unterschied liegt in der Qubit-Oszillator-Kopplung, die weitaus stärker als die Atom-Feld-Wechselwirkung sein kann. Ein weiterer Unterschied ist die starke Anbindung von Qubits an die Umgebung, die zu größeren Dekohärenzeffekten führt als in der Cavity-QED. Deshalb sind die üblichen Methoden der Quantenoptik nicht immer anwendbar und können zu ungenauen oder sogar falschen Ergebnissen führen.

In dieser Diplomarbeit werden gekoppelte Qubit-Oszillator-Systeme mit Hinsicht auf laserartiges Verhalten untersucht. Dabei werden zwei unterschiedliche Herangehensweisen verwendet: Die erste Methode benutzt die numerische Lösung der Liouville-Gleichung für die Dichtematrix des Single-Qubit-Lasers im stationären Limit $t \to \infty$; aus der Kenntnis der Dichtematrix lassen sich Erwartungswerte und auch Verteilungsfunktionen berechnen. Dieses Verfahren erfordert als Näherung eine Beschränkung des unendlich-dimensionalen Hilbertraums der Oszillator-Zustände auf endliche Dimensionen.

Mit dieser Methode wird das System aus dem Jena-Experiment untersucht. Es wird gezeigt, dass das getriebene Fluss-Qubit zu laserartigem Verhalten im LC-Schwingkreis, gekennzeichnet durch eine deutliche Erhöhung der mittleren Photonenzahl gegenüber dem thermischen Gleichgewicht führen kann. In diesem System spielt Dissipation eine zentrale Rolle, da Relaxationseffekte des Fluss-Qubits laserartiges Verhalten erst ermöglichen. Es stellt sich heraus, dass die mittlere Photonenzahl eine nichtmonotone Abhängigkeit von der Relaxationsrate besitzt. Weiterhin hängt auch die Form der Verteilungsfunktion der Photonen im Resonator wesentlich von der Größe der Relaxationsrate ab. Außerdem wird gezeigt, dass auch die Anwesenheit reiner Dephasierung des Fluss-Qubits das Verhalten des Single-Qubit-Lasers in starkem Maße beeinflusst.

Die zweite Methode besteht in der Untersuchung der Bewegungsgleichungen für die Systemoperatoren. Dieses Verfahren bietet Zugang zu zeitabhängigen Größen wie der Korrelationsfunktion des Oszillators, die das Emissionsspektrum des Single-Qubit-Lasers definiert. Als Näherung müssen bei dieser Methode bestimmte Erwartungswerte von Operator-Produkten faktorisiert werden. Dabei muss allerdings berücksichtigt werden, dass dies aufgrund der starken Kopplung zwischen dem Qubit und dem Oszillator nicht bei allen Erwartungswerten zulässig ist.

Dieser Weg erlaubt die Herleitung von analytischen Ausdrücken für die Linienbreite und die Frequenzverschiebung der vom Resonator emittierten Strahlung; dabei zeigen sich im Bereich starker Kopplung Unterschiede zu herkömmlichen Ergebnissen der Quantenoptik. Wenn der Resonator zusätzlich durch ein äußeres Feld getrieben wird, entsteht ein neuer Beitrag im Emissionsspektrum: Der Single-Qubit-Laser verstärkt das externe Signal. Dieser Fall wird mit Hilfe der Master-Gleichung numerisch untersucht.

## 1.1 Aufbau der Diplomarbeit

Die Diplomarbeit ist wie folgt gegliedert:

Das zweite Kapitel behandelt einige Grundlagen, die für die Diplomarbeit relevant sind. Im ersten Teil des Kapitels werden dabei die wichtigsten Eigenschaften von supraleitenden Qubits zusammengefasst. Der zweite Teil befasst sich mit Dissipation in quantenmechanischen Systemen. Es werden dabei zwei Methoden zur Behandlung von Dissipation vorgestellt.

Im dritten Kapitel werden zeitunabhängige Eigenschaften von Single-Qubit-Lasern behandelt; als Beispiel wird konkret das System aus dem Jena-Experiment betrachtet. Durch Lösung der Master-Gleichung für die Dichtematrix des Single-Qubit-Lasers werden die mittlere Photonenzahl und die Photonenverteilung im Resonator berechnet. Dabei wird insbesondere der Einfluss der Dissipation auf den stationären Zustand des Single-Qubit-Lasers untersucht.

Das vierte Kapitel befasst sich mit der Untersuchung der Korrelationsfunktion des Oszillators, die das Emissionsspektrum des Single-Qubit-Lasers bestimmt. Es werden analytische Ausdrücke für die Linienbreite und die Frequenzverschiebung hergeleitet und Unterschiede zu herkömmlichen quantenoptischen Theorien aufgezeigt. Im zweiten Teil des Kapitels wird das Verhalten des Single-Qubit-Lasers unter Einfluss eines externen kohärenten Signals untersucht, das den Oszillator antreibt.

Im fünften Kapitel werden die Ergebnisse der Diplomarbeit zusammengefasst. Außerdem wird ein Ausblick auf noch offene Probleme gegeben.

In den Anhängen A und B werden schließlich Rechnungen und Herleitungen präsentiert, die im Haupttext ausgelassen wurden.

# Kapitel 2

# Grundlagen

Dieses Kapitel befasst sich mit einigen Grundlagen, die für die Diplomarbeit von Bedeutung sind und besteht aus zwei Teilen: Zuerst werden supraleitende Qubits behandelt und ihre wichtigsten Eigenschaften zusammengefasst. Danach werden zwei unterschiedliche Methoden vorgestellt, die die Behandlung von Dissipation in quantenmechanischen Systemen erlauben: die Master-Gleichung und die Heisenberg-Langevin-Gleichungen.

## 2.1 Quantenmechanische Stromkreise

Die Systeme, die hier untersucht werden sollen, bestehen aus supraleitenden Stromkreisen. Trotz ihrer makroskopischen Dimensionen zeigen sie unter bestimmten Voraussetzungen quantenmechanisches Verhalten. Im Folgenden sollen diese Voraussetzungen kurz erläutert und die grundlegenden Eigenschaften dieser Stromkreise beschrieben werden.

### 2.1.1 Der quantenmechanische LC-Schwingkreis

Ein quantenmechanischer LC-Schwingkreis besteht aus einer Kapazität $C$ und einer Induktivität $L$ in einem supraleitenden Ring (siehe Abbildung 2.1). Der Schwingkreis kann durch einen einzigen kollektiven Freiheitsgrad, den magnetischen Fluss $\Phi$ in der Induktivität, beschrieben werden [26]. Der Hamilton-Operator für dieses System ist $H = \frac{q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}$, wobei $q$ die Ladung auf dem Kondensator bezeichnet, und stellt einen harmonischen Oszillator mit der Resonanzfrequenz $\omega_0 = \sqrt{LC}$ dar. Im Gegensatz zur klassischen Beschreibungsweise sind $\Phi$ und $q$ Operatoren, die nicht miteinander

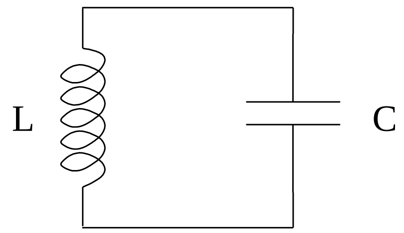


Abbildung 2.1: LC-Schwingkreis.

kommutieren, $[\Phi, q] = i\hbar$.

Durch Einführung der üblichen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^{(\dagger)}$ lässt sich H auch folgendermaßen darstellen:

$$H = \hbar\omega_0 \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \tag{2.1}$$

Wie schon angesprochen, gibt es bestimmte Voraussetzungen für das Auftreten von quantenmechanischen Effekten [27]. Zunächst einmal dürfen die verwendeten Metalle keinen Widerstand besitzen, da die Anwesenheit von Dissipation die Quantenkohärenz zerstört; aus diesem Grund werden supraleitende Materialien verwendet, was eine hinreichend niedrige Temperatur erfordert. Als weitere wichtige Voraussetzung muss die Temperatur auch deutlich kleiner sein als die Differenz der Eigenenergien des Oszillators, $k_B T \ll \hbar\omega_0$, um den Einfluss von thermischen Fluktuationen zu begrenzen.

Wenn die oben genannten Voraussetzungen erfüllt sind, verhält sich das System quantenmechanisch. Dies führt beispielsweise dazu, dass die Ladung auf der Kapazität nicht mehr einfach durch eine Zahl beschrieben werden kann, sondern durch eine kohärente Überlagerung verschiedener Ladungskonfigurationen. Allgemein wird das Auftreten von quantenmechanischen Effekten in makroskopischen Systemen unter dem Begriff *Makroskopische Quantenkohärenz* zusammengefasst.

Der eben beschriebene LC-Schwingkreis bildet ein einfaches Beispiel für einen linearen Stromkreis. Dies äußert sich u.a. darin, dass die Eigenenergien äquidistant sind. Wie sich allerdings zeigen wird, werden zum Verarbeiten von Quanteninformation nichtlineare Bauelemente benötigt; ein solches Element bilden Josephson-Kontakte.

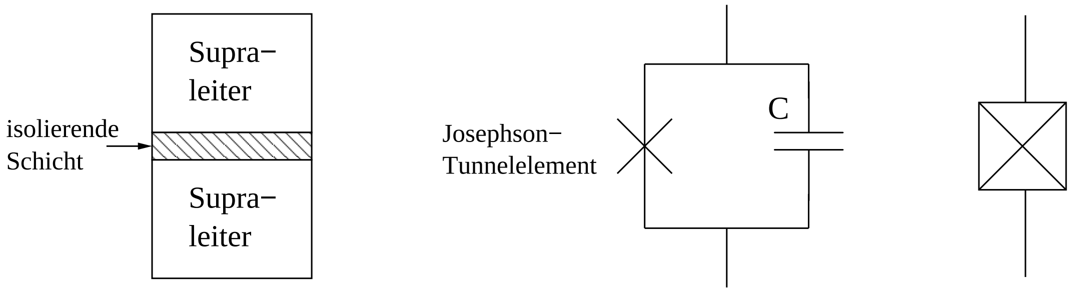


Abbildung 2.2: Links: Josephson-Kontakt; rechts: Ersatzschaltbild und Schaltsymbol.

### 2.1.2 Josephson-Kontakte

In konventionellen Supraleitern geschieht der Ladungstransport durch Cooper-Paare, d.h. Paare von Elektronen, die einer attraktiven, durch Phononen vermittelten Wechselwirkung unterliegen. Eine Energielücke $\Delta$ im Anregungsspektrum der Quasi-Teilchen sorgt dabei für die widerstandslose Stromleitung. Das grundlegende Merkmal des supraleitenden Zustands ist die Existenz einer makroskopischen Wellenfunktion $\Psi(\vec{r},t) = |\Psi(\vec{r},t)| \exp[i\Phi(\vec{r},t)]$ für die Cooper-Paare [28]; dabei ist $n_s(\vec{r},t) = |\Psi(\vec{r},t)|^2$ die lokale Dichte der supraleitenden Elektronen.

Die Bedeutung der Phase hingegen wurde zum ersten Mal durch Josephson betont [29]. Er zeigte, dass eine Phasendifferenz $\varphi$ (im Folgenden *Phase* genannt) zwischen zwei Supraleitern, die durch eine isolierende Schicht getrennt sind, zu einem supraleitenden Strom führt:

$$I_s = I_0 \sin\varphi. \tag{2.2}$$

$I_0$ ist dabei der maximale Suprastrom, der durch die Schicht fließen kann und durch äußere Parameter festgelegt. Die Zeitabhängigkeit der Phase ist durch die Spannung $V$ zwischen den Supraleitern bestimmt:

$$\hbar\dot{\varphi} = 2eV. \tag{2.3}$$

Zusammen führen diese beiden Gleichungen zu der Beziehung $\dot{I} = \left(I_0 \frac{2e}{\hbar} \cos\varphi\right) V$, was einer nichtlinearen Induktivität $L_J = \frac{\hbar}{2eI_0 \cos\varphi}$ entspricht.

Ein Josephson-Kontakt besteht aus einer $2-3$ nm dünnen, isolierenden Schicht zwischen zwei massiven Supraleitern. Ein solcher Kontakt kann als Parallelschaltung

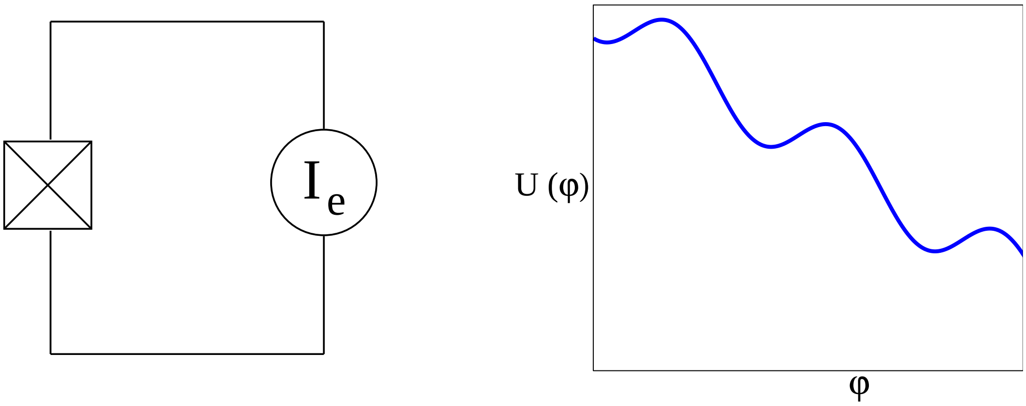


Abbildung 2.3: Links: Josephson-Kontakt mit äußerer Stromquelle; $I_e$ ist der von der Quelle zugeführte Strom. Rechts: Zugehöriges Waschbrett-Potential.

eines Josephson-Tunnel-Elements (dargestellt durch ein Kreuz) und seiner intrinischen Kapazität $C$ beschrieben werden (siehe Abbildung 2.2). Abbildung 2.3 zeigt ein einfaches Beispiel für einen Stromkreis mit einem Josephson-Kontakt: letzterer ist dabei an eine äußere Stromquelle angeschlossen. Wenn die gewöhnlichen Kirchhoffschen Regeln auf diesen Stromkreis angewandt werden, führt dies unter Ausnutzung von Gleichungen 2.2 und 2.3 zu folgender Bewegungsgleichung für die Phase $\varphi$:

$$\frac{\hbar}{2e} C\ddot{\varphi} + I_C \sin\varphi = I_e, \tag{2.4}$$

wobei $I_e$ der von außen zugeführte Strom ist.

Die klassische Dynamik kann durch die Hamilton-Funktion $H = Q^2/(2e)^2 E_C + U(\varphi)$ beschrieben werden, wobei $Q$, die Ladung auf der Kapazität, kanonisch konjugiert zur Phase $\varphi$ ist. $U(\varphi) = -\frac{\hbar I_e}{2e}\varphi - E_J \cos\varphi$ ist das sog. Waschbrettpotential, das in Abbildung 2.3 zu sehen ist; die Phase $\varphi$ ist in einer der Potentialmulden gefangen und oszilliert um das Minimum, falls die Energie nicht ausreicht, um die Mulde zu verlassen. Das Verhalten des Josephson-Kontakts wird dabei durch zwei charakteristische Energien bestimmt: die *Josephson-Energie* $E_J = \frac{\hbar}{2e} I_0$, die mit Tunnelprozessen verknüpft ist, und die Ladungsenergie $E_C = \frac{(2e)^2}{2C}$, die elektrostatische Energie eines Cooper-Paares auf der Kapazität.

Die quantenmechanische Beschreibung von Josephson-Kontakten geschieht mithilfe der Operatoren $\varphi$ für die Phase und $N$ für die Zahl der Cooper-Paare auf der Kapazität; $N$ ist dabei proportional zur Ladung Q, $Q = 2eN$. Die beiden Operatoren sind kanonisch konjugiert, $[\varphi, N] = i$. Letzteres hat zur Folge, dass die Phase und die Ladung der Heisenbergschen Unschärferelation unterworfen sind.

Durch geeignete Wahl des Materials und der Dimensionen des Josephson-Kontakts lassen sich die Werte für die Josephson-Energie $E_J$ und die Ladungsenergie $E_C$ und dadurch das Verhalten der Stromkreise in weiten Bereichen variieren. Im Fall $E_J \gg E_C$ ist die Phase $\varphi$ wohldefiniert, während die Ladung starken Fluktuationen unterworfen ist. Unter dieser Bedingung lässt sich mithilfe des oben gezeigten Stromkreises bereits ein sog. *Phasen-Qubit* realisieren: Analog zum harmonischen Potential existieren diskrete Energieniveaus, denen Eigenzustände entsprechen, bei denen die Phase innerhalb der Potentialmulde lokalisiert ist.

Aufgrund der Anharmonizität des Potentials, die durch den äußeren Strom $I_e$ bedingt ist, sind die Energieniveaus allerdings nicht äquidistant, was sich begünstigend für die Realisierung eines Qubits auswirkt. Die beiden untersten Eigenzustände können dann als Zustände des Qubits verwendet werden. Wichtig ist dabei, dass die zugehörigen Energien deutlich unterhalb des oberen Randes der Mulde liegen, damit die Phase nicht aus der Mulde heraustunneln kann, d.h. damit makroskopisches Quanten-Tunneln unterdrückt wird; dies wird durch die Bedingung $I_e < I_0$ sichergestellt.

Zwei weitere grundlegende Arten von Qubits, das *Fluss-Qubit* und das *Ladungs-Qubit*, werden im nächsten Abschnitt ausführlicher besprochen. Supraleitende Qubits erfordern niedrige Temperaturen: Zum Einen muss sich natürlich das verwendete Metall im supraleitenden Zustand befinden; zum Anderen muss die Temperatur auch geringer sein als die Josephson-Energie, $k_B T \ll E_J$, da sonst Fluktuationen in der Phase $\varphi$ den effektiven supraleitenden Tunnelstrom zu 0 mitteln [28].

Aufgrund ihres makroskopischen Charakters sind supraleitende Qubits besonders anfällig für Dekohärenzeffekte, die die unitäre Entwicklung des Qubits stören. Die Ankopplung an die Umgebung muss deshalb möglichst klein gehalten werden, wenn quantenmechanische Phänomene wie z.B. Rabi-Oszillationen beobachtet werden sollen. Andererseits wird sie in Single-Qubit-Lasern ausgenutzt, um den angeregten Zustand des Qubits zu bevölkern. Im zweiten Teil des Grundlagen-Kapitels wird gezeigt werden, wie Dekohärenzeffekte modelliert werden können und welche Auswirkungen sie haben.

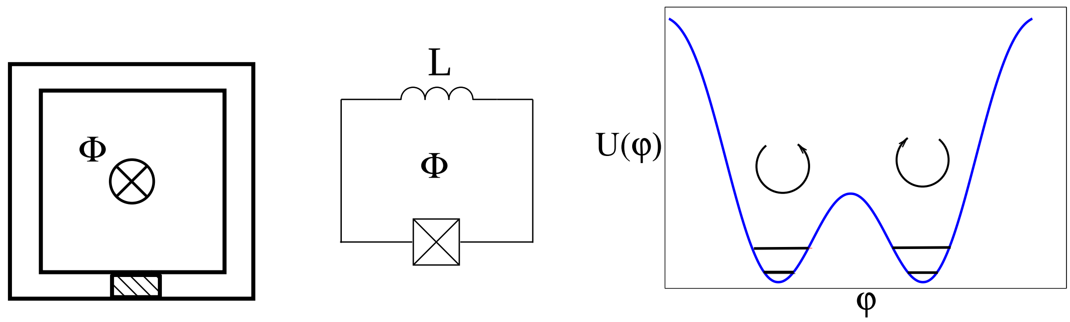


Abbildung 2.4: Links: Schematischer Aufbau des Fluss-Qubits und Ersatzschaltbild. Rechts: Zugehöriges Potential: Gezeigt ist der symmetrische Fall $\Phi_e = \frac{1}{2}\Phi_0$; die eingezeichneten Energieniveaus entsprechen Fluktuationen des Stroms um einen Mittelwert mit oder gegen den Uhrzeigersinn.

### 2.1.3 Fluss-Qubits

Ein Fluss-Qubit besteht aus einem supraleitenden Ring mit einer Induktivität $L$, der durch einen Josephson-Kontakt unterbrochen ist, und arbeitet wie das Phasen-Qubit im Bereich $E_J \gg E_C$. Abbildung 2.4 zeigt den schematischen Aufbau und das Ersatzschaltbild. Das Potential für die Phase ist durch $U(\varphi) = \frac{E_L}{2}(\varphi - \varphi_e) - E_J \cos\varphi$ gegeben, wobei die magnetische Energie $E_L$ durch die Beziehung $E_L = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 L}$ mit dem magnetischen Flussquant $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ definiert ist. Die Form des Potentials $U(\varphi)$ und somit das Verhalten dieses Stromkreises hängt über die Größe $\varphi_e = \frac{2e}{\hbar}\Phi_e$ wesentlich vom äußeren magnetischen Fluss $\Phi_e$ durch den Ring ab. Im Fall $\Phi_e \approx \frac{1}{2}\Phi_0$ hat $U(\varphi)$ zwei benachbarte Minima [30] (siehe Abbildung 2.4).

Die im Schaubild eingezeichneten Energieniveaus entsprechen Zuständen, bei denen ein Dauerstrom mit bzw. gegen den Uhrzeigersinn fließt. Die beiden untersten dieser Fluss-Zustände sind energetisch weit von den anderen getrennt und bilden die zwei Zustände des Qubits. Im allgemeinen, nicht-symmetrischen Fall besitzen sie eine unterschiedliche Energie, wobei die Energiedifferenz $\epsilon(\Phi_e)$ vom äußeren magnetischen Fluss abhängt. Da der Potentialwall nicht unendlich groß ist, kann die Phase zwischen den beiden Mulden tunneln. Dieses makroskopische Quanten-Tunneln koppelt die Fluss-Zustände und führt zum Hamilton-Operator

$$H = -\frac{1}{2}\left(\epsilon(\Phi_e)\sigma_z + \Delta\sigma_x\right) \tag{2.5}$$

in der Basis der Fluss-Zustände; $\sigma_x$ und $\sigma_z$ sind die Pauli-Matrizen. Die Eigenener-

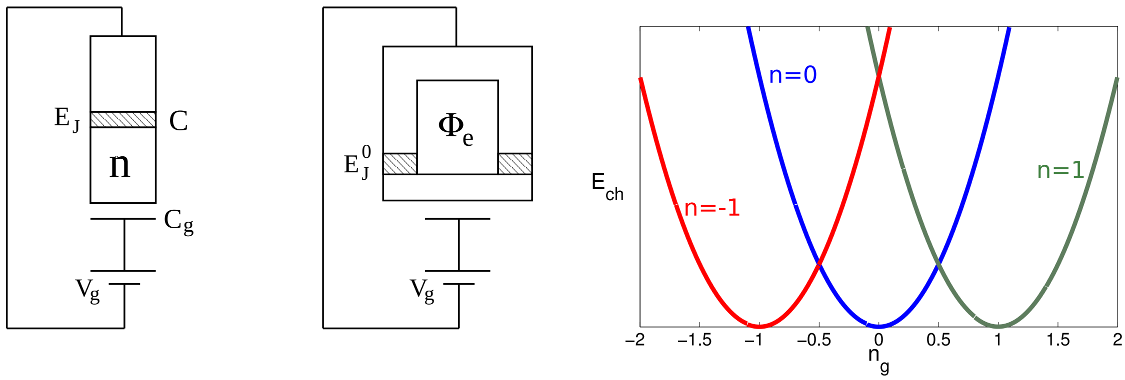


Abbildung 2.5: Links: Schematischer Aufbau des Ladungs-Qubits. Mitte: Ladungs-Qubit mit zwei Josephson-Kontakten; die effektive Josephson-Energie hängt vom magnetischen Fluss $\Phi_e$ ab. Rechts: Energie der Ladungs-Zustände.

gien des Qubits sind $E_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$.

Die Tatsache, dass die Energie $\epsilon(\Phi_e)$ vom äußeren Fluss abhängt, lässt sich ausnutzen, um die Parameter des Fluss-Qubits kontrolliert zu verändern oder es induktiv an andere elektrische Bauteile zu koppeln. Dies wurde im Jena-Experiment, das in der Einleitung kurz beschrieben wurde, umgesetzt: Das Qubit wurde durch ein äußeres Magnetfeld angetrieben und war zugleich an die Induktivität des LC-Schwingkreises gekoppelt.

In der Praxis werden meistens Fluss-Qubits mit drei Josephson-Kontakten verwendet. Der Grund dafür ist, dass die Induktivität des supraleitenden Rings ziemlich groß sein muss, um die gewünschte Form des Potentials $U(\varphi)$ zu liefern. Dies könnte durch Vergrößern des Ringumfangs geschehen, was allerdings das Qubit anfälliger für Dekohärenz machen würde. Deshalb wird die (nichtlineare) Induktivität von zusätzlichen Josephson-Kontakten ausgenutzt; diese Fluss-Qubits besitzen das gleiche qualitative Verhalten wie im obigen einfachen Beispiel besprochen.

### 2.1.4 Ladungs-Qubits

Ein Ladung-Qubit besteht aus einer supraleitenden Insel, die über einen Josephson-Kontakt mit einem massiven Supraleiter verbunden ist (siehe Abbildung 2.5) und arbeitet im Gegensatz zum Fluss-Qubit im Bereich $E_C \gg E_J$. Falls die Temperatur kleiner ist als die Ladungsenergie, $k_B T \ll E_C$, befindet sich das System im Coulomb-Blockade-Regime: Die Zahl $n$ der Cooper-Paare auf der supraleitenden Insel ist dann wohldefiniert und wird durch die Gate-Spannung $V_g$ kontrolliert.

Wenn Josephson-Tunneln vernachlässigt wird, ist der Hamilton-Operator durch $H = E_C\,(n - n_g)^2$ gegeben; dabei ist $E_C = \frac{(2e)^2}{2C_\Sigma}$ die Ladungsenergie, $C_\Sigma = C + C_g$ die Gesamtkapazität der Insel, und die Zahl $n_g = -\frac{C_g V_g}{2e}$ durch die Gate-Spannung bestimmt. Abbildung 2.5 zeigt die Energie der Ladungs-Zustände, die von $n_g$ abhängt. Für $n_g \approx \frac{1}{2}$ gibt es zwei benachbarte Energieniveaus, die durch die Ladungsenergie $E_C$ weit von den anderen Niveaus getrennt liegen. Die zugehörigen Ladungszustände $|n = 0\rangle$ und $|n = 1\rangle$ bilden die Zustände des Qubits. Die Berücksichtigung von Josephson-Tunneln führt zum Hamilton-Operator des Ladungs-Qubits

$$H = -\frac{1}{2}\left(\epsilon(n_g)\sigma_z + E_J\sigma_x\right) \tag{2.6}$$

in der Basis der Ladungszustände. Die Eigenenergien sind $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\epsilon^2 + E_J^2}$. Der Parameter $\epsilon = E_C\,(1 - 2n_g)$ hängt von der Gate-Spannung ab; es ist damit möglich, das Qubit kapazitiv an andere elektrische Bauteile zu koppeln, wie z.B. an einen Wellenleiter wie im SSET-Experiment (siehe Einleitung)

Häufig werden, wie in Abbildung 2.5 gezeigt, zwei Josephson-Kontakte statt nur einem verwendet. Diese Geometrie hat den Vorteil, dass die Josephson-Energie $E_J$ vom magnetischen Fluss $\Phi_e$ abhängt. Dies führt zu einer vollen Kontrolle über den Hamilton-Operator.

## 2.2 Quantendissipation

In den vorherigen Abschnitten über supraleitende Qubits wurden Dekohärenzeffekte vernachlässigt. Eine der Forderungen an Qubits ist jedoch die Möglichkeit zur Manipulation des Qubits durch äußere Felder sowie zur Messung des Zustands, die unweigerlich zu einer Kopplung an die elektromagnetische Umgebung führen. Konkrete Ursachen für Dekohärenz können Fluktuationen der Gate-Spannung in Ladungs-Qubits oder des von außen angelegten Magnetfeldes in Fluss-Qubits sein.

In einem idealen quantenmechanischen System ist die Zeitentwicklung unitär und reversibel. Die Wechselwirkung mit der Umgebung führt zu einer Verschränkung des Systems mit den Freiheitsgraden der Umgebung; eine Auswirkung davon ist Dephasierung, der Zerfall der Phasenkohärenz; eine weitere Folge sind das Auftreten von Relaxations- und Anregungsprozessen, die die Besetzung der Qubit-Zustände ändern.

Häufig sind Dekohärenzeffekte in Qubits unerwünscht; um für die Verwendung in einem Quantencomputer in Frage zu kommen, benötigen sie eine lange Phasenkohärenzzeit. Andererseits wird Dissipation in Single-Qubit-Lasern ausgenutzt, um der Umgebung Energie zu entziehen und den laserartigen Zustand im Oszillator aufrechtzuerhalten.

### 2.2.1 Modell

Das grundlegende Konzept bei der Behandlung von Dissipation ist die Aufteilung des Gesamtsystems in ein kleines System $\mathcal{A}$ und ein Reservoir $\mathcal{R}$ mit einer großen Zahl von Freiheitsgraden. Im Allgemeinen ist dabei nur die Entwicklung des Systems $\mathcal{A}$ von Interesse, nicht die des Reservoirs. Der Hamilton-Operator für dieses Problem lautet

$$H = H_A + H_R + V. \tag{2.7}$$

Dabei sind $H_A$ und $H_R$ die Hamilton-Operatoren für die ungekoppelten Teilsysteme, während $V$ die Wechselwirkung zwischen beiden beschreibt. Die Kopplung an das Reservoir stört die unitäre Entwicklung des Systems $\mathcal{A}$; die Beschreibung durch einen Hamilton-Operator, der nur die Variablen des Systems enthält, wird damit nicht mehr möglich. Aus diesem Grund existieren verschiedene Methoden, um den Einfluss der Dissipation quantitativ zu erfassen. Die Diskussion dieser Methoden orientiert sich dabei im Folgenden an der Behandlung in den Quellen [31] und [32].

Zur Anwendung werden einige Voraussetzungen an das Reservoir gemacht. Eine zentrale Annahme ist dabei, dass der makroskopische Zustand von $\mathcal{R}$ unter dem Einfluss der Wechselwirkung mit dem System $\mathcal{A}$ unverändert bleibt. Weiterhin muss die Kopplung schwach und die Korrelationszeit $\tau_c$ der Fluktuationen des Reservoirs viel kleiner sein als die typische Zeitskala $T_R$, auf der sich der Zustand des Systems ändert, $\tau_c \ll T_R$ [31].

Es gibt zwei allgemeine Ansätze, um die Auswirkung der Kopplung an das Reservoir $\mathcal{R}$ zu untersuchen. Der erste Ansatz geht von der Liouville-Gleichung für die Dichtematrix des Gesamtsystems aus und führt zu einer Master-Gleichung für die reduzierte Dichtematrix des Systems $\mathcal{A}$. Im zweiten Ansatz werden Heisenberg-Gleichungen für die Systemoperatoren betrachtet; die Eliminierung der Variablen des Reservoirs ergibt Heisenberg-Langevin-Gleichungen mit Dämpfungs- und Fluktuationstermen.

### 2.2.2 Master-Gleichung

Der Ausgangspunkt für die Herleitung der Master-Gleichung ist die Liouville-Gleichung für die Dichtematrix des Gesamtsystems:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[H, \rho(t)\right], \tag{2.8}$$

mit dem Hamilton-Operator $H$ aus Gleichung 2.7. Der erste Schritt ist der Übergang in die Wechselwirkungs-Darstellung bezüglich des Operators $H_A + H_R$, um die schnelle freie Zeitentwicklung zu beseitigen, so dass sich die transformierte Dichtematrix $\tilde{\rho}(t) = e^{i(H_A+H_R)t/\hbar}\rho(t)e^{-i(H_A+H_R)t/\hbar}$ nur langsam ändert. Die Integration der Liouville-Gleichung zwischen den Zeiten $t$ und $t + \Delta t$ ergibt dann die Gleichung:

$$\tilde{\rho}(t+\Delta t) = \tilde{\rho}(t) - \frac{i}{\hbar}\int_t^{t+\Delta t} dt' \left[\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t')\right]. \tag{2.9}$$

Dieser Ausdruck kann durch Iteration in zweite Ordnung bezüglich der Wechselwirkung $V$ entwickelt werden. Da allgemein nur Interesse an der Entwicklung des Systems $\mathcal{A}$ besteht, wird außerdem die partielle Spur über die Zustände des Reservoirs angewandt. Dies führt zu einer Gleichung für die reduzierte Dichtematrix $\tilde{\sigma}(t) = Tr_R\{\tilde{\rho}(t)\}$ des Systems $\mathcal{A}$ bzw. deren Änderung $\Delta\tilde{\sigma}(t) = \tilde{\sigma}(t+\Delta t) - \tilde{\sigma}(t)$ im Zeitintervall $\Delta t$:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\sigma}(t) &= -\frac{i}{\hbar}\int_t^{t+\Delta t} dt'\, Tr_R\left[\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t)\right] \\ &\quad -\frac{1}{\hbar^2}\int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt''\, Tr_R\left[\tilde{V}(t'), \left[\tilde{V}(t''), \tilde{\rho}(t'')\right]\right]\end{aligned} \tag{2.10}$$

Bis zu diesem Punkt sind keine Näherungen erfolgt; zur weiteren Behandlung müssen jedoch einige Voraussetzungen erfüllt sein.

Die erste Annahme stützt sich auf die Tatsache, dass das Reservoir durch die Kopplung an das System $\mathcal{A}$ weitgehend unbeeinflusst bleibt. Konkret wird angenommen, dass die reduzierte Dichtematrix des Reservoirs konstant ist, $\tilde{\sigma}_R(t) = Tr_A\{\tilde{\rho}(t)\} = \sigma_R$, und dass sich das Reservoir in einem stationären Zustand befindet, $[\sigma_R, H_R] = 0$.

Weiterhin wird eine lineare Kopplung zwischen einem Operator A des Systems $\mathcal{A}$ und R des Reservoirs angenommen, $V = -AR$, wobei die Beziehung $Tr_R\left[\sigma_R R\right] = 0$ gilt. Letzteres ist keine wirkliche Einschränkung, da es durch eine Umdefinition der

Operatoren $H_R$ und $V$ immer erfüllt werden kann.

Das Ziel ist es, eine Gleichung zu erhalten, die die Änderung der reduzierten Dichtematrix $\Delta\tilde{\sigma}(t)$ mit der reduzierten Dichtematrix $\tilde{\sigma}(t)$ selbst zum Zeitpunkt $t$ verknüpft. Dazu wird zunächst die Zeit $t''$ in der Dichtematrix $\tilde{\rho}(t'')$ des Gesamtsystems durch den Zeitpunkt $t$ ersetzt. Dies ist unter der Annahme gerechtfertigt, dass die Kopplung an das Reservoir schwach und das Zeitintervall $\Delta t$ viel kleiner als die Zeitskala $T_R$ ist, auf der sich der Zustand des Systems $\mathcal{A}$ ändert, $\Delta t \ll T_R$.

Eine weitere wichtige Voraussetzung an das Reservoir ist, dass die Korrelationszeit $\tau_c$ der Fluktuationen wesentlich kleiner ist als die Zeit $T_R$. Diese Annahme rechtfertigt beispielsweise die Faktorisierung der Dichtematrix, $\tilde{\rho}(t) \simeq \tilde{\sigma}(t) \otimes \sigma_R$ und führt zu einer Gleichung für die mittlere Änderung der reduzierten Dichtematrix $\tilde{\sigma}(t)$ im Zeitintervall $\Delta t$ mit $\tau_c \ll \Delta t \ll T_R$:

$$\frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta t} = -\frac{1}{\hbar^2}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt''\, Tr_R \left[\tilde{V}(t'), \left[\tilde{V}(t''), \tilde{\sigma}(t) \otimes \sigma_R\right]\right] \tag{2.11}$$

Diese Gleichung beschreibt einen Markov-Prozess, d.h. durch die verschiedenen Näherungen wurde erreicht, dass die zeitliche Entwicklung des Systems $\mathcal{A}$ durch seinen Zustand in der Gegenwart (gegeben durch $\tilde{\sigma}(t)$) bestimmt ist und nicht mehr von der Vergangenheit abhängt.

### Physikalische Interpretation

Es ist häufig zweckmäßig, die Master-Gleichung auf die Eigenzustände des Hamilton-Operators $H_A$ zu projizieren. Dies liefert eine Gleichung der Form

$$\frac{\Delta\tilde{\sigma}_{ab}}{\Delta t} = \sum_{c,d}^{(sec)} e^{i(\omega_{ab}-\omega_{cd})}\, \mathcal{R}_{abcd}\, \tilde{\sigma}_{cd}(t) \tag{2.12}$$

Die Indizes kennzeichnen dabei die Eigenzustände, und $\omega_{ab} = (E_a - E_b)/\hbar$ sind die Bohrfrequenzen. In Gleichung 2.12 wurde bereits die sog. säkulare Näherung durchgeführt, d.h. nur Terme berücksichtigt, die die Bedingung $|\omega_{ab} - \omega_{cd}| \ll 1/\Delta t$ erfüllen. Der Wechsel in die Schrödinger-Darstellung liefert schließlich die Master-Gleichung für die reduzierte Dichtematrix $\sigma(t)$ des Systems $\mathcal{A}$

$$\frac{d}{dt}\sigma_{ab}(t) = -i\omega_{ab}\sigma_{ab}(t) + \sum_{c,d}^{sec} \mathcal{R}_{abcd}\, \sigma_{cd}(t) \tag{2.13}$$

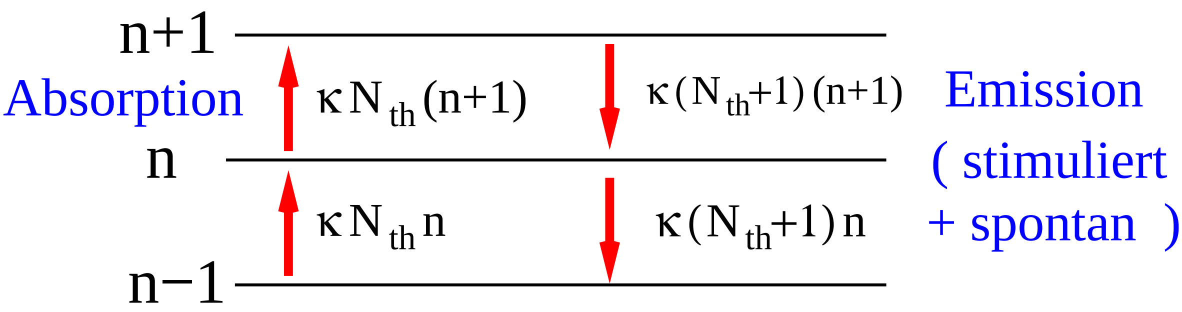


Abbildung 2.6: Die Kopplung an das Reservoir verursacht Übergänge zwischen den Eigenzuständen des Oszillators.

mit konstanten Koeffizienten $\mathcal{R}_{abcd}$.

Innerhalb der säkularen Näherung koppeln die diagonalen Einträge $\sigma_{aa}$ nur an andere diagonale Einträge, $d\sigma_{aa}/dt = \sum_c \mathcal{R}_{aacc}\,\sigma_{cc}$. Dies lässt sich auch als

$$\frac{d\sigma_{aa}}{dt} = \sum_{c \neq a} \left(\sigma_{cc}\Gamma_{c\to a} - \sigma_{aa}\Gamma_{a\to c}\right) \tag{2.14}$$

schreiben, wobei die Raten $\Gamma_{c\to a}$ durch die Art des Reservoirs und dessen Wechselwirkung mit dem System $\mathcal{A}$ bestimmt sind. Dies ist eine Gleichung für die Besetzung der Eigenzustände. $\Gamma_{c\to a}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System aufgrund seiner Wechselwirkung mit der Umgebung vom Zustand $|c\rangle$ in den Zustand $|a\rangle$ übergeht. Für das Gesamtsystem entspricht dies einem Prozess $|\mu, c\rangle \to |\nu, a\rangle$, wobei die griechischen Buchstaben Zustände des Reservoirs bezeichnen. Diese Prozesse sind dabei für das Gesamtsystem energieerhaltend, das bedeutet, dass eine Relaxation im System $\mathcal{A}$ einen Übergang des Reservoirs in einen höherenergetischen Zustand hervorruft.

### Master-Gleichungen für Qubit und Oszillator

Für einen harmonischen Oszillator $H_{osc} = \hbar\omega_0(a^\dagger a + \frac{1}{2})$, der an ein Wärmebad der Temperatur $T$ gekoppelt ist, lässt sich folgende quantenoptische Master-Gleichung herleiten [32]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H_{osc}] \quad &+ \quad \frac{\kappa}{2}(N_{th}+1)\left(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a\right) \\ &+ \quad \frac{\kappa}{2}N_{th}\left(2a^\dagger\rho a - aa^\dagger\rho - \rho aa^\dagger\right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Im Gegensatz zu vorher bezeichnet hier und im Folgenden $\rho$ die reduzierte Dichtematrix des betrachteten Systems und nicht mehr die Dichtematrix des Gesamtsystems. $N_{th} = \left(\exp\left(\frac{\hbar\omega_T}{k_B T}\right) - 1\right)^{-1}$ ist die thermische Zahl der Photonen bei der Temperatur $T$, und $\kappa$ ist die Dämpfungsrate des Oszillators.

Durch Projektion auf die Eigenzustände $|n\rangle$ lassen sich Gleichungen für die Besetzungen $\rho_{n,n}$ herleiten:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n,n} &= \kappa N_{th} n \rho_{n-1,n-1} - \kappa N_{th}\left(n+1\right)\rho_{n,n} &\quad (2.16) \\ &\quad +\kappa\left(N_{th}+1\right)\left(n+1\right)\rho_{n+1,n+1} - \kappa\left(N_{th}+1\right) n \rho_{n,n} &\quad (2.17) \end{aligned}$$

Die Terme auf der rechten Seite besitzen eine anschauliche Interpretation und sind in Abbildung 2.6 dargestellt . Der erste Summand beschreibt Absorption, also Übergänge $|n\rangle \rightarrow |n+1\rangle$ mit einer Rate $\kappa N_{th}(n+1)$. Der zweite Summand beschreibt Emissionsprozesse $|n+1\rangle \rightarrow |n\rangle$, genauer genommen stimulierte Emission mit einer Rate $\kappa N_{th}(n+1)$ und spontane Emission mit einer Rate $\kappa(n+1)$.

Als Master-Gleichung für das Qubit $H_q = \frac{1}{2}\hbar\epsilon\sigma_z$ wird in dieser Arbeit

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}\left[\rho, H_q\right] &+ \frac{\Gamma_\downarrow}{2}\left(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \rho\sigma_+\sigma_- - \sigma_+\sigma_-\rho\right) \\ &+ \frac{\Gamma_\uparrow}{2}\left(2\sigma_+\rho\sigma_- - \rho\sigma_-\sigma_+ - \sigma_-\sigma_+\rho\right) \\ &+ \frac{\Gamma_\varphi^*}{2}\left(\sigma_z\rho\sigma_z - \rho\right) \qquad (2.18) \end{aligned}$$

mit den Auf- und Absteigeoperatoren $\sigma_\pm$ verwendet. Die Projektion auf die Qubitzustände $|\uparrow,\downarrow\rangle$ ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\uparrow\uparrow} &= \Gamma_\uparrow\rho_{\downarrow\downarrow} - \Gamma_\downarrow\rho_{\uparrow\uparrow} &\quad (2.19) \\ \dot{\rho}_{\downarrow\downarrow} &= \Gamma_\downarrow\rho_{\uparrow\uparrow} - \Gamma_\uparrow\rho_{\downarrow\downarrow} &\quad (2.20) \\ \dot{\rho}_{\uparrow\downarrow} &= \frac{i}{\hbar}\epsilon\rho_{\uparrow\downarrow} - \frac{1}{2}\left(\Gamma_\uparrow + \Gamma_\downarrow\right)\rho_{\uparrow\downarrow} - \Gamma_\varphi^*\rho_{\uparrow\downarrow} &\quad (2.21) \end{aligned}$$

Die Terme in Gleichung 2.18 beschreiben also Relaxations-, Anregungs- und Dephasierungsprozesse. Die Dephasierungsrate $\Gamma_\varphi = \frac{1}{2}\left(\Gamma_\uparrow + \Gamma_\downarrow\right) + \Gamma_\varphi^*$ setzt sich dabei aus zwei Beiträgen zusammen: Der erste Beitrag stammt von Prozessen, bei denen das Qubit seinen Zustand ändert. Der zweite Beitrag hingegen, die reine Dephasierungsrate, stammt von Prozessen, bei denen nur das Reservoir seinen Zustand ändert, nicht aber das System.

### 2.2.3 Heisenberg-Langevin-Gleichungen

Eine alternative Methode zur Behandlung von Dissipation bieten die Heisenberg-Langevin-Gleichungen. Den Ausgangspunkt bilden die Heisenberg-Gleichungen für die Operatoren des Systems $\mathcal{A}$ und des Reservoirs. Hier wird im Gegensatz zur Herleitung der Master-Gleichung die zusätzliche Voraussetzung benötigt, dass das Reservoir aus harmonischen Oszillatoren besteht, $H_R = \sum_n \frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{k_n q_n^2}{2}$. Die Kopplung wird weiterhin als linear angenommen. Der Hamilton-Operator des Gesamtsystems lässt sich nach einer kanonischen Transformation der Reservoir-Variablen in folgender Form schreiben:

$$H = H_A + \sum_n (p_n - \kappa_n X)^2 + \omega_n^2 q_n^2. \tag{2.22}$$

$X$ ist ein Operator des Systems $\mathcal{A}$, der Index $n$ kennzeichnet die Oszillationsmoden des Reservoirs mit Frequenzen $\omega_n$. Die Heisenberg-Gleichungen für die Variablen des Reservoirs besitzen eine einfache Form: $\dot{q}_n = \frac{i}{\hbar}[H, q_n] = p_n - \kappa_n X$ und $\dot{p}_n = \frac{i}{\hbar}[H, p_n] = -\omega_n^2 q_n$. Durch Verwendung der Erzeugung-/ Vernichtungsoperatoren $a_n^{(\dagger)} = \frac{\omega_n q_n \pm i p_n}{\sqrt{2\hbar\omega_n}}$ lässt sich eine formale Lösung angeben:

$$a_n(t) = e^{-i\omega_n(t-t_0)} a_n(t_0) - \kappa_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2\hbar}} \int_{t_0}^{t} e^{-i\omega_n(t-t')} X(t') dt'. \tag{2.23}$$

Die Bewegungsgleichung $\dot{Y} = \frac{i}{\hbar}[H, Y]$ für Operatoren des Systems $\mathcal{A}$ enthält im Allgemeinen die Operatoren $q_n$, $p_n$ des Reservoirs. Das Einfügen der formalen Lösung $a_n^{(\dagger)}(t)$ führt zur quantenmechanischen Langevin-Gleichung für $Y$:

$$\dot{Y} = \frac{i}{\hbar}[H_A, Y] - \frac{i}{2\hbar}\left[X, \left[Y, \xi(t) - \int_{t_0}^{t} f(t-t')\dot{X}(t')dt' - f(t-t_0)X(t_0)\right]_+\right] \tag{2.24}$$

mit $\xi(t) = i \sum_n \kappa_n \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}} \left[a_n^\dagger(t_0) e^{i\omega_n(t-t_0)} - c.c.\right]$ und $f(t) = \sum_n \kappa_n^2 \cos(\omega_n t)$. Bei der Herleitung dieser Gleichung sind dabei noch keine Näherungen erfolgt.

Die Funktion $f(t-t')$ verknüpft die Operatoren $\dot{Y}(t)$ und $\dot{X}(t')$ zu verschiedenen Zeitpunkten. Falls die Funktion $f(\tau)$ schnell zerfällt, d.h. ihre Zerfallszeit viel kleiner ist als die typische Zeitskala, auf der sich der Operator $\dot{X}(t)$ ändert, lässt sich der Ausdruck $f(\tau)$ im Integral durch eine Delta-Funktion annähern, $f(\tau) = 2\gamma\delta(t)$. Dies entspricht der zentralen Näherung $\tau_c \ll T_R$ in der Herleitung der Master-Gleichung und liefert den Ausdruck

$$\dot{Y} = \frac{i}{\hbar}[H_A, Y] - \frac{i}{2\hbar}\left[[X, Y], \xi(t) - \gamma\dot{X}\right]_+. \tag{2.25}$$

Der erste Teil der Gleichung enthält die kohärente Zeitentwicklung des Operators $Y$. Der zweite Teil beschreibt den Einfluss der Kopplung an das Reservoir und besteht aus zwei Beiträgen: einem Dämpfungsterm $\sim \dot{X}$ und einem Rauschterm $\sim \xi(t)$. Dabei hängt $\xi(t)$ nur von den Operatoren des Reservoirs zum Anfangszeitpunkt $t_0$ ab und beschreibt stochastische Fluktuationen mit einer kurzen Korrelationszeit.

### Langevin-Gleichungen für Qubit und Oszillator

Die Anwendung der oben beschriebenen Methode auf einen harmonischen Oszillator $H_{osc} = \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$, der an ein Bad von Oszillatoren im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur $T$ gekoppelt ist, ergibt für den Operator $\tilde{a}(t) = a(t)e^{i\omega_0 t}$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\tilde{a}(t) = -\frac{\kappa}{2}\tilde{a}(t) + F(t). \tag{2.26}$$

Die entsprechende Gleichung für den Operator $\tilde{a}^\dagger(t)$ kann durch komplexes Konjugieren erhalten werden. Der Operator $F(t)$ fluktuiert um den Mittelwert $\langle F(t)\rangle = 0$. Dies stellt sicher, dass die Gleichung für den Erwartungswert $\frac{d}{dt}\langle\tilde{a}(t)\rangle = -\frac{\kappa}{2}\langle\tilde{a}(t)\rangle$ konsistent mit der Master-Gleichung 2.15 für den Oszillator ist. Die Korrelatoren $\langle F^{(\dagger)}(t)F^{(\dagger)}(t')\rangle$ sind durch

$$\begin{aligned}
\langle F(t)F(t')\rangle &= \langle F^\dagger(t)F^\dagger(t')\rangle = 0 && (2.27)\\
\langle F^\dagger(t)F(t')\rangle &= \kappa N_{th}\, g_N(t-t') && (2.28)\\
\langle F(t)F^\dagger(t')\rangle &= \kappa\,(N_{th}+1)\; g_A(t-t') && (2.29)
\end{aligned}$$

gegeben. $N_{th}$ ist die thermische Photonenzahl, $g_N(\tau)$ und $g_A(\tau)$ sind normalisierte Funktionen, die auf der Zeitskala $\tau_c$ zerfallen, wobei $\tau_c$ die Korrelationszeit der Fluktuationen des Reservoirs ist. Die obigen Korrelatoren können zur Auswertung des Ausdrucks $\langle\dot{n}(t)\rangle = \langle\dot{a}^\dagger(t)a(t)\rangle + \langle a^\dagger(t)\dot{a}(t)\rangle = -\kappa\langle n\rangle + \langle a^\dagger(t)F(t)\rangle + \langle F^\dagger(t)a(t)\rangle$ benutzt werden. Die resultierende Gleichung für die mittlere Photonenzahl im Oszillator lautet

$$\frac{d}{dt}\langle n(t)\rangle = -\kappa\left(\langle n(t)\rangle - N_{th}\right), \tag{2.30}$$

die ebenfalls konsistent mit der Master-Gleichung 2.15 ist.

Für das Qubit mit dem Hamilton-Operator $H_q = \frac{1}{2}\hbar\epsilon\sigma_z$ werden in dieser Arbeit die Langevin-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\sigma_z = -\Gamma_1 \left(\sigma_z - D_0\right) + F_z(t) \tag{2.31}$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_+ = -\left(\Gamma_\varphi - i\epsilon\right)\sigma_+ + F_+(t) \tag{2.32}$$

benutzt. Dabei sind die Raten $\Gamma_1 = \Gamma_\uparrow + \Gamma_\downarrow$ und $\Gamma_\varphi = \frac{\Gamma_1}{2} + \Gamma_\varphi^*$ über die Relaxationsrate $\Gamma_\downarrow$, die Anregungsrate $\Gamma_\uparrow$ und die reine Dephasierungsrate $\Gamma_\varphi^*$ des Qubits definiert; $D_0 = \frac{\Gamma_\uparrow - \Gamma_\downarrow}{\Gamma_1}$ ist die Inversion des Qubits im Gleichgewicht mit dem Reservoir.

Die Fluktuationsterme $F_i(t)$ erfüllen die Gleichung $\langle F_i(t)\rangle = 0$. Die Korrelationsfunktionen erfüllen die Beziehung $\langle F_i(t)F_j(t')\rangle = D_{ij}\, g_{ij}(t-t')$, wobei die Funktionen $g_{ij}(\tau)$ normalisiert sind und auf einer Zeitskala $\tau_c$ zerfallen, die sehr viel kürzer ist als die Dekohärenzzeit $\frac{1}{\Gamma_\varphi}$. Die Diffusionskoeffizienten $D_{ij}$ ergeben sich aus der Forderung, dass die Heisenberg-Langevin-Gleichungen - analog zum betrachteten Fall des Oszillators - konsistent mit der Master-Gleichung 2.18 für das Qubit sind. Explizit müssen folgende Beziehungen gelten: $D_{+-} = \Gamma_\uparrow + \Gamma_\varphi^*(1 + \langle\sigma_z\rangle)$, $D_{-+} = \Gamma_\downarrow + \Gamma_\varphi^*(1 - \langle\sigma_z\rangle)$, $D_{--} = D_{++} = 0$, $D_{zz} = 2\Gamma_1 - 2(\Gamma_\uparrow - \Gamma_\downarrow)\langle\sigma_z\rangle$, $D_{z+} = 2\Gamma_\downarrow\langle\sigma_+\rangle$, $D_{+z} = -2\Gamma_\uparrow\langle\sigma_+\rangle$, $D_{z-} = -2\Gamma_\uparrow\langle\sigma_-\rangle$ und $D_{-z} = 2\Gamma_\downarrow\langle\sigma_-\rangle$.

# Kapitel 3

# Fluss-Qubit-Laser

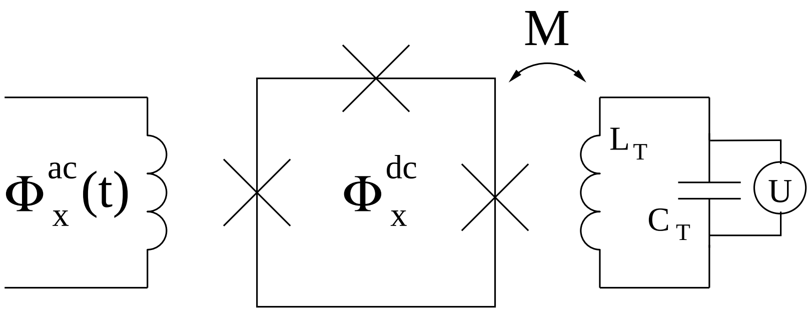


Abbildung 3.1: Schematischer Aufbau des Experiments.

Im vorliegenden Teil der Arbeit werden zeitunabhängige Eigenschaften von Single-Qubit-Lasern betrachtet; Teile dieses Kapitels sind bereits in die Veröffentlichung [33] eingeflossen. Den Zugang zu den Eigenschaften im stationären Zustand, den das System für große Zeiten $t \to \infty$ annimmt, bietet die reduzierte Dichtematrix des gekoppelten Qubit-Oszillator-Systems; diese wird durch numerische Lösung der Master-Gleichung für den Single-Qubit-Laser erhalten. Die Betrachtungen konzentrieren sich auf das konkrete Beispiel des in Abbildung 3.1 gezeigten Systems, das in Jena experimentell untersucht wurde.

Darin wird ein Fluss-Qubit von einem magnetischen Feld, das nahe der Frequenz $\Delta E/2\pi\hbar \sim$ GHz des Qubits oszilliert, zu Rabi-Oszillationen getrieben. Das Fluss-Qubit ist induktiv an einen LC-Schwingkreis gekoppelt, dessen Resonanzfrequenz $\omega_T/2\pi \sim$ MHz viel kleiner ist als die des Qubits. Die Grundidee des Experiments liegt darin, den Oszillator durch die langsamen Rabi-Oszillationen des Qubits anzutreiben; dies kann, abhängig von der Frequenz des treibenden Feldes, zu einer Erhöhung oder Absenkung der mittleren Photonenzahl im Resonator führen.

Die Herleitung des Hamilton-Operators und der Dissipationsterme ist bereits in [25] erfolgt und soll deshalb nur kurz skizziert werden.

## 3.1 Modell

Der Hamilton-Operator für das getriebene Qubit und den Oszillator ist durch

$$H = -\frac{1}{2}\epsilon\sigma_z - \frac{1}{2}\Delta\sigma_x - \hbar\Omega_{R0}\cos(\omega_d t)\sigma_z + \hbar\omega_T a^\dagger a + g\sigma_z(a + a^\dagger) \tag{3.1}$$

gegeben. Die ersten beiden Terme beschreiben das Fluss-Qubit in der Basis der Fluss-Zustände; dabei ist $\epsilon(\Phi_x^{dc})$ die Energiedifferenz zwischen den Fluss-Zuständen und $\Delta$ die Tunnelamplitude. Der dritte Term stellt das treibende magnetische Feld mit Amplitude $\Omega_{R0}$ und Frequenz $\omega_d$ dar. Die letzten beiden Terme beschreiben den Oszillator mit Resonanzfrequenz $\omega_T$ und die Wechselwirkung zwischen dem Qubit und dem Oszillator mit der Kopplungskonstanten $g$; die Kopplung ist dabei wie beim treibendem Feld induktiv, wird also für das Qubit durch den Operator $\sigma_z$ beschrieben.

Die Energiedifferenz zwischen den Eigenzuständen des Qubits ist $\Delta E = \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$. Aufgrund des großen Unterschieds zur Resonanzfrequenz des Oszillators lässt sich eine RWA (Rotating Wave Approximation) durchführen, die den Hamilton-Operator

$$\begin{aligned} H \quad &= \quad -\frac{1}{2}\Delta E\sigma_z + \hbar\Omega_{R0}\cos(\omega_d t)\cos\zeta\sigma_x + \hbar\omega_T a^\dagger a \\ &\quad +g\sin\zeta\sigma_z\left(a + a^\dagger\right) - \frac{g^2}{\Delta E}\cos^2\zeta\sigma_z\left(a + a^\dagger\right)^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

ergibt, in dem der Winkel $\zeta$ über $\tan\zeta = \frac{\epsilon}{\Delta}$ definiert ist. Das System wird in der Nähe des Symmetriepunkts $\epsilon = 0$ untersucht, wo die Beziehung $\sin\zeta \ll 1$ gilt. Aus diesem Grund ist im Hamilton-Operator auch die Zwei-Photon-Kopplung enthalten, die von vergleichbarer Größe wie die Ein-Photon-Kopplung sein kann.

Die Transformation in ein Bezugssystem, das mit der Frequenz $\omega_d$ rotiert, und eine anschließende Diagonalisierung führen zum Hamilton-Operator

$$\begin{aligned} H^R \quad &= \quad \frac{1}{2}\hbar\Omega_R\sigma_z + \hbar\omega_T a^\dagger a + g\sin\zeta\left(\sin\beta\sigma_z - \cos\beta\sigma_x\right)\left(a + a^\dagger\right) \\ &\quad -\frac{g^2}{\Delta E}\cos^2\zeta\left(\sin\beta\sigma_z - \cos\beta\sigma_x\right)\left(a + a^\dagger\right)^2 . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Hierbei ist $\Omega_R = \sqrt{\Omega_{R0}^2 \cos^2\zeta + \delta\omega_d^2}$ die Rabi-Frequenz, $\delta\omega_d = \omega_d - \frac{\Delta E}{\hbar}$ die Verstimmung zwischen dem treibendem Feld und dem Qubit, und der Winkel $\beta$ über die Beziehung $\tan\beta = \frac{\delta\omega_d}{\Omega_{R0}\cos\zeta}$ definiert.

Im Folgenden soll die Liouville-Gleichung $\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho] + L_Q\rho + L_R\rho$ für die Dichtematrix des Qubit-Oszillator-Systems gelöst werden. $H$ beschreibt die kohärente Entwicklung des Systems, $L_Q$ und $L_R$ den Einfluss der Dissipation des Qubits und des Oszillator. Für den Oszillator wird dabei Gleichung 2.15

$$L_R\rho = \frac{\kappa}{2}(N_{th}+1)\left(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a\right) + \frac{\kappa}{2}N_{th}\left(2a^\dagger\rho a - aa^\dagger\rho - \rho aa^\dagger\right) \tag{3.4}$$

mit der Dämpfungsrate $\kappa$ verwendet, und für das Qubit Gleichung 2.18

$$L_Q\rho = \frac{\Gamma_0}{2}\left(2\sigma_+\rho\sigma_- - \rho\sigma_-\sigma_+ - \sigma_-\sigma_+\rho\right) \tag{3.5}$$

in der Basis der Qubit-Eigenzustände. Dabei wird angenommen, dass die Temperatur $T$ viel kleiner als die Energiedifferenz ist, $k_BT \ll \Delta E$, und dass keine zusätzliche reine Dephasierung auftritt; deshalb wird nur Relaxation mit einer Rate $\Gamma_0$ berücksichtigt (nach Definition des Hamilton-Operators ist hier $|\uparrow\rangle$ der Grundzustand).

Die Transformationen, die zum Hamilton-Operator 3.3 führen, müssen auch auf die Dämpfungsterme angewandt werden. Dies lässt den Oszillatorterm unverändert, ergibt aber für das Qubit den neuen Dissipationsterm

$$\begin{aligned} L_Q^R\rho^R = & \quad \frac{\Gamma_\downarrow}{2}\left(2\sigma_-\rho^R\sigma_+ - \rho^R\sigma_+\sigma_- - \sigma_+\sigma_-\rho^R\right) \\ & + \frac{\Gamma_\uparrow}{2}\left(2\sigma_+\rho^R\sigma_- - \rho^R\sigma_-\sigma_+ - \sigma_-\sigma_+\rho^R\right) \\ & + \frac{\Gamma_\varphi^*}{2}\left(\sigma_z\rho^R\sigma_z - \rho^R\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

mit den Raten $\Gamma_{\uparrow,\downarrow} = \frac{\Gamma_0}{4}(1\pm\sin\beta)^2$ und $\Gamma_\varphi^* = \frac{\Gamma_0}{2}\cos^2\beta$, die über den Winkel $\beta$ von der Amplitude und der Frequenz des treibenden Feldes abhängen.

## 3.2 Lösungsmethode

In diesem Abschnitt wird die Methode vorgestellt, mit der die reduzierte Dichtematrix des Qubit-Oszillator-Systems berechnet wird.

Die Zeitentwicklung des Systems wird durch die Liouville-Gleichung

$$\dot{\rho}^R = -\frac{i}{\hbar}\left[H^R,\rho^R\right] + L_Q^R\rho^R + L_R\rho^R \tag{3.7}$$

für die Dichtematrix im rotierenden Bezugssystem beschrieben.

Das Ziel ist das Auffinden von stationären Lösungen, $\dot{\rho}^R = 0$. Der erste Schritt bei der Anwendung numerischer Methoden besteht darin, den unendlich-dimensionalen Hilbert-Raum des Oszillators auf endliche Dimensionen zu beschränken. In den Rechnungen werden dann nur die ersten $N$ Fock-Zustände $|0\rangle, |1\rangle, \ldots |N-1\rangle$ berücksichtigt, darüberliegende Energieniveaus werden nicht beachtet.

Die Liouville-Gleichung 3.7 wird dadurch zu einer Matrixgleichung für die $2N \times 2N$-Matrix $\rho^R$. Zur Berechnung der stationären Lösung ist es zweckmäßig, diese Matrixgleichung in eine Vektorgleichung umzuformen; dies geschieht mit Hilfe des Kronecker-Produkts $\otimes$, das es erlaubt, eine Gleichung $AXB = C$ mit Matrizen A,B,C und X in die Gleichung $\left(B^T \otimes A\right) vec(X) = vec(C)$ umzuschreiben. Dabei ist $vec(X)$ ein Vektor, der die Spalten der Matrix $X$ enthält.

Dies führt zu der Gleichung $\dot{\rho}_V^R = G\rho_V^R$ für den Vektor $\rho_V^R$ der Länge $4N^2$. $G$ ist eine Matrix mit den Dimensionen $4N^2 \times 4N^2$ und wird aus der Liouville-Gleichung 3.7 konstruiert. Stationäre Lösungen $\dot{\rho}_V^R = 0$ erfüllen die Gleichung $G\rho_V^R = 0$; um die richtige Normierung für die Dichtematrix zu erhalten, muss schließlich noch die Bedingung $Tr\rho = 1$ addiert werden.

Die gesuchten stationären Lösungen ergeben sich somit als Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\hat{G}\rho_V^R = b, \tag{3.8}$$

die mit gängigen numerischen Methoden berechnet werden können. Die Kenntnis der Dichtematrix erlaubt die Berechnung aller physikalischen Größen im stationären Limit, wie beispielsweise der Verteilungsfunktion der Photonen im Oszillator.

Die in Gleichung 3.8 auftretende Matrix $G$ besitzt die Dimension $4N^2 \times 4N^2$. Der wachsende numerische Aufwand beschränkt die maximale Photonenzahl $N$, die bei der Berechnung von $\rho^R$ verwendet werden kann. Dies setzt Grenzen bei der Anwendung der Methode, da nur Ergebnisse zugänglich sind, die Oszillator-Zustände beschreiben, deren mittlere Photonenzahl $\langle n\rangle$ deutlich unterhalb $N$ liegt.

In der vorliegenden Arbeit wird $N = 100$ als maximale Photonenzahl verwendet.

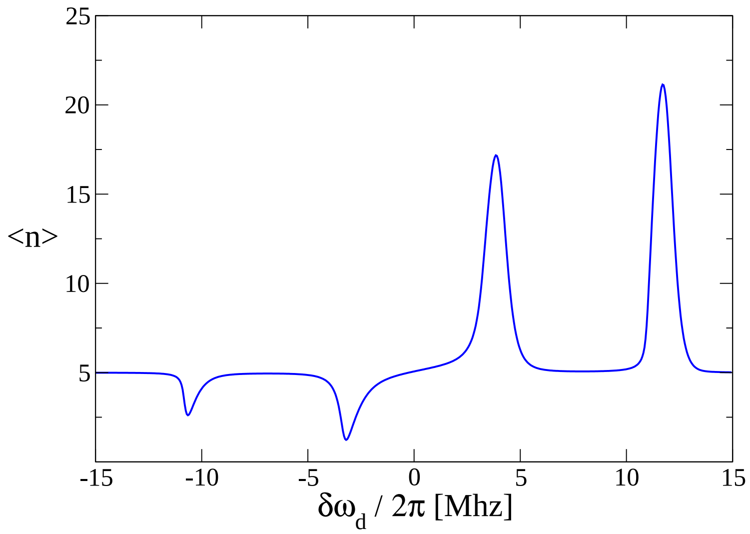


Abbildung 3.2: Mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle$ in Abhängigkeit der Verstimmung $\delta\omega_d$ des treibenden Feldes bei konstanter Amplitude $\Omega_{R0}/2\pi = 5$ MHz.

Für die Schaubilder werden, sofern nicht anders angegeben, folgende Parameter benutzt: $\Delta/2\pi\hbar = 1$ GHz und $\epsilon = 0{,}01\Delta$ für das Qubit, $\omega_T/2\pi = 6$ MHz für den Oszillator, $g/2\pi\hbar = 3{,}3$ MHz für die Kopplungskonstante, $\Gamma_0/2\pi = 125$ kHz und $\kappa/2\pi = 1{,}7$ kHz für die Dämpfung des Qubits und des Oszillators, $\Omega_{R0}/2\pi = 5$ MHz und $\delta\omega_d/2\pi = 3{,}32$ MHz für das treibende Feld und $N_{th} = 5$ für die thermische Photonenzahl im Oszillator.

## 3.3 Stationäre Eigenschaften

Aus der Kenntnis der Dichtematrix lassen sich die stationären Eigenschaften des Qubit-Oszillator-Systems berechnen. Schaubild 3.2 zeigt die mittlere Zahl der Photonen $\langle n \rangle$ im Oszillator bei fester Amplitude $\Omega_{R0}$ in Abhängigkeit der Verstimmung $\delta\omega_d = \omega_d - \frac{\Delta E}{\hbar}$ des treibenden magnetischen Feldes. Auf der rechten Seite, für $\delta\omega_d > 0$, ist eine deutliche Erhöhung der mittleren Photonenzahl zu beobachten; auf der linken Seite hingegen sinkt sie unter den thermischen Erwartungswert $N_{th} = 5$.

Eine wichtige Eigenschaft des getriebenen Fluss-Qubits ist, dass die Raten $\Gamma_{\uparrow,\downarrow}$ und $\Gamma_\varphi^*$ sowie die Rabi-Frequenz $\Omega_R$ von der Amplitude $\Omega_{R0}$ und der Verstimmung $\delta\omega_d$ des treibenden Feldes abhängen. Dies bedeutet, dass das getriebene Qubit im rotierenden Bezugssystem durch ein Zwei-Zustand-System beschrieben werden kann, dessen effektive Temperatur und Energiedifferenz verstellbar sind. Die Eigenschaften des treibenden Feldes gehen dabei über den Winkel $\beta$ mit $\tan\beta = \frac{\delta\omega_d}{\Omega_{R0}\cos\zeta}$ in den Hamilton-Operator und den Dissipationsterm für das Qubit ein.

Für eine blaue Verstimmung, d.h. wenn die treibende Frequenz größer ist als die Energiedifferenz zwischen den Eigenzuständen des Fluss-Qubits, $\delta\omega_d > 0$, gilt $\sin\beta > 0$; somit ist die Anregungsrate größer als die Relaxationsrate, $\Gamma_\uparrow = \frac{\Gamma_0}{4}\left(1+\sin\beta\right)^2 > \Gamma_\downarrow = \frac{\Gamma_0}{4}\left(1-\sin\beta\right)^2$. Die Inversion $D_0 = \langle\sigma_z\rangle = \frac{\Gamma_\uparrow-\Gamma_\downarrow}{\Gamma_\uparrow+\Gamma_\downarrow} = \frac{2\sin\beta}{1+\sin^2\beta} > 0$ des Zwei-Zustand-System in Abwesenheit von Kopplung an den Resonator entspricht einer negativen effektiven Temperatur.

Das Qubit entzieht dem treibenden Feld Energie, die in den Oszillator fließt; dies führt zu einer Erhöhung der mittleren Photonenzahl $\langle n\rangle$. Der Effekt ist dabei in den Bereichen ausgeprägt, in denen Ein- oder Zwei-Photon-Prozesse resonant sind, d.h. wo die Beziehungen $\Omega_R = \sqrt{\Omega_{R0}^2\cos^2\zeta + \delta\omega_d^2} \approx \omega_T$ oder $\Omega_R \approx 2\omega_T$ gelten. Dort zeigt das System laserartiges Verhalten.

Dabei ist erkennbar, dass die Größe des Effekts für die Ein- und Zwei-Photon-Kopplung vergleichbar ist. Außerhalb der resonanten Bereiche ist die effektive Kopplung nicht stark genug, um den Oszillator merklich aus dem thermischen Gleichgewicht zu bringen; in diesen Gegenden ist die mittlere Photonenzahl durch die Temperatur des Wärmebads bestimmt, $\langle n\rangle \approx N_{th}$.

Für rote Verstimmung, $\delta\omega_d < 0$, ist die Relaxationsrate größer als die Anregungsrate, $\Gamma_\uparrow > \Gamma_\downarrow$, was eine positive effektive Temperatur für das Zwei-Zustand-System ergibt. Falls sie niedriger ist als die Temperatur des Wärmebads des Oszillators, kühlt das Qubit den Oszillator und führt Energie an die Umgebung ab. Die Absenkung der mittleren Photonenzahl tritt auch hier im Bereich der Ein- und Zwei-Photon-Resonanz als deutlicher Effekt zutage.

Abbildung 3.3 zeigt die mittlere Photonenzahl $\langle n\rangle$ in Abhängigkeit der Amplitude $\Omega_{R0}$ und Verstimmung $\delta\omega_d$ des treibenden Feldes; die Bereiche der starken Erhöhung bzw. Absenkung der mittleren Photonenzahl liegen entlang der Kurven $\Omega_R \approx \omega_T$ und $\Omega_R \approx 2\omega_T$. Dabei ist zu sehen, dass sowohl die Antriebsleistung als auch die -frequenz einen erheblichen Einfluss auf den Zustand des Oszillators haben: Für blaue Verstimmung hängt die Photonenzahl in den resonanten Bereichen monoton von der Amplitude $\Omega_{R0}$, d.h. der Leistung des treibenden Feldes ab, und steigt vom thermischen Gleichgewicht $\langle n\rangle \approx N_{th}$ ausgehend auf einen Wert $\langle n\rangle \gg N_{th}$.

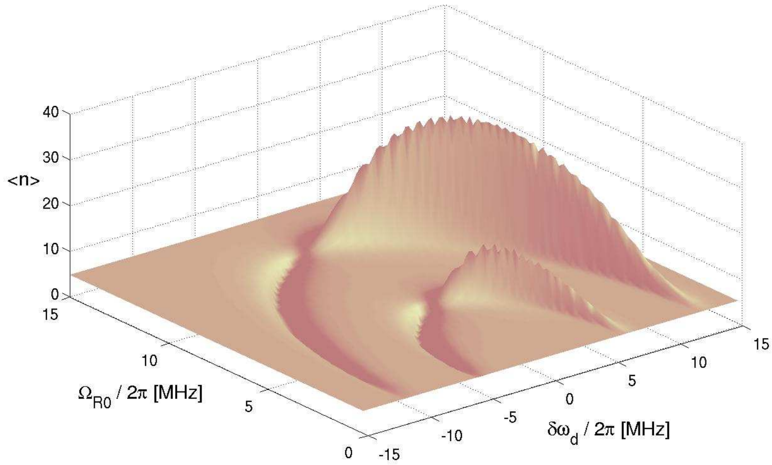


Abbildung 3.3: Mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle$ in Abhängigkeit der Verstimmung $\delta\omega_d$ und der Amplitude $\Omega_{R0}$ des treibenden Feldes.

Eine Änderung der Frequenz $\omega_d$ wirkt sich über die Raten $\Gamma_{\uparrow,\downarrow}$ auf die effektive Temperatur des Zwei-Zustand-Systems aus. Eine Erhöhung der Verstimmung hat eine größere Inversion $D_0$ zur Folge, was sich in einer höheren mittleren Photonenzahl niederschlägt.

Die Berechnungen zeigen, dass sich mit einem getriebenen Fluss-Qubit, das an einen LC-Schwingkreis gekoppelt ist, ein Single-Qubit-Laser realisieren lässt; das gleiche System kann allerdings auch verwendet werden, um den Resonator unter seine Umgebungstemperatur zu kühlen.

### 3.3.1 Verteilungsfunktionen

Die Lösung der Master-Gleichung ist mit einigem numerischen Aufwand verbunden. Ein Vorteil dieser Methode liegt jedoch darin, dass die Dichtematrix die volle Information über den stationären Zustand des Systems enthält; somit sind nicht nur Erwartungswerte zugänglich, sondern auch die Verteilungsfunktion $P(n)$, die die Wahrscheinlichkeit angibt, dass sich $n$ Photonen im Resonator befinden. Dies ist wichtig, um zu zeigen dass sich das System in einem laserartigen Zustand befindet, d.h. dass die Erhöhung der mittleren Photonenzahl von einer wesentlichen Änderung der Photonen-Verteilung begleitet wird.

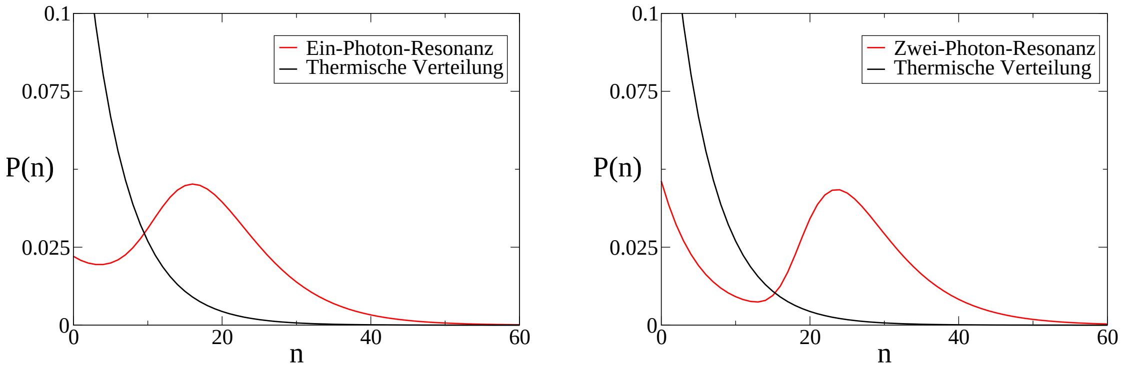


Abbildung 3.4: Verteilungsfunktion P(n) der Photonen für $\delta\omega_d = 3,85$ MHz (links) und $\delta\omega_d = 11,7$ MHz (rechts).

Abbildung 3.4 zeigt die Verteilungen $P(n)$ für eine blaue Verstimmung, $\delta\omega_d > 0$, am jeweils höchsten Punkt der Ein- und Zwei-Photon-Resonanz in Schaubild 3.2. Zum Vergleich ist jeweils auch die thermische Verteilung eingezeichnet, die im Oszillator weit außerhalb der Ein- und Zwei-Photon-Resonanz vorherrscht. Dabei ist einerseits zu sehen, dass die Verteilungsfunktion ihr Maximum bei einem Wert $n \gg N_{th} = 5$ erreicht; andererseits zeigen die Kurven für kleine $n$ nichtmonotones Verhalten und weichen in ihrer Form deutlich von der Poissonverteilung eines gewöhnlichen Laser-Zustands ab.

Diese Abweichung ist die Folge einer Frequenzverschiebung, die in der bisherigen Diskussion vernachlässigt wurde. Die Kopplungsterme aus dem Hamilton-Operator lassen sich im Rahmen einer RWA als Summe von drei Beiträgen schreiben:

$$V = g_1 \left(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger\right) + g_2 \left(\sigma_+ a^2 + \sigma_- a^{\dagger 2}\right) + g_3 \sigma_z (a a^\dagger + a^\dagger a) \tag{3.9}$$

mit den Kopplungskonstanten $g_1 = -g \sin\zeta \cos\beta$, $g_2 = \frac{g^2}{\Delta E} \cos^2\zeta \cos\beta$ und $g_3 = -\frac{g^2}{\Delta E} \cos^2\zeta \sin\beta$. Die ersten beiden Terme beschreiben Ein- und Zwei-Photon-Übergänge und sorgen für die Erhöhung bzw. Absenkung der mittleren Photonenzahl im Oszillator; der dritte Term beschreibt eine Frequenzverschiebung.

Letztere hat zur Konsequenz, dass die Resonanzbedingung für den 1-Photon-Übergang $|\uparrow n\rangle \rightarrow |\downarrow n+1\rangle$ zu $\Omega_R = \omega_T + 4|g_3|\,(n+1)$ abgeändert wird und von $n$ anhängt. Diese Bedingung ist für Photonenzahlen $n$ im Bereich des Maximums der Verteilung $P(n)$ (linke Seite des Schaubildes) erfüllt. Dort kann das getriebene

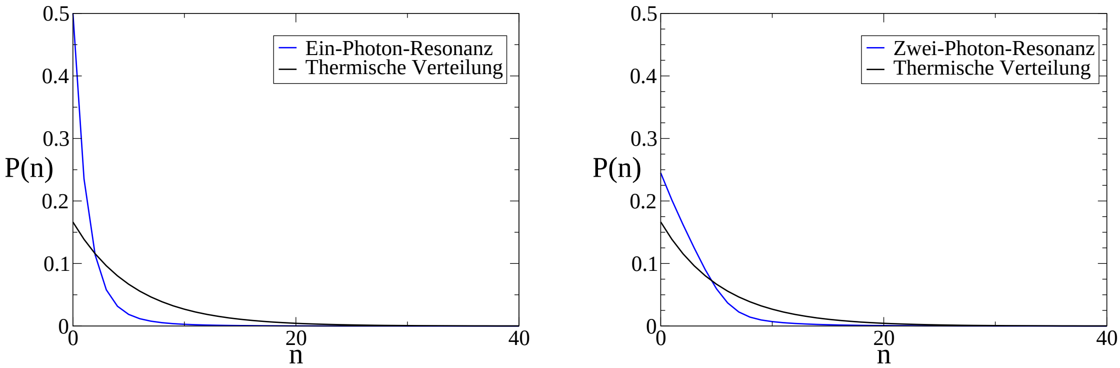


Abbildung 3.5: Verteilungsfunktion P(n) der Photonen für $\delta\omega_d = -3,2$ MHz (links) und $\delta\omega_d = -10,65$ MHz (rechts).

Qubit den Oszillator weit aus dem thermischen Gleichgewicht bringen.

Für kleine Photonenzahlen $n \approx N_{th}$ ist die Resonanzbedingung jedoch verletzt; die effektive Kopplung an das Qubit ist in diesem Bereich klein, was zur Folge hat, dass die Verteilung $P(n)$ dort näher an der thermischen Verteilung liegt als bei einem gewöhnlichen Laser-Zustand.

Dieser Effekt tritt auch bei bei der 2-Photonen-Kopplung auf (rechter Teil des Schaubildes) und ist dort sogar noch deutlicher. Die Existenz zweier Maxima in der Verteilungsfunktion $P(n)$, die deutlich voneinander getrennt sind, lässt sich dabei als Bistabilität interpretieren.

Abbildung 3.5 zeigt schließlich noch die Verteilungen $P(n)$ für rote Verstimmung an den jeweils tiefsten Punkten der Ein- und Zwei-Photon-Resonanz in Abbildung 3.2; beide Kurven sind in ihrer Form einer thermischen Verteilung ähnlich, allerdings mit einer effektiven Temperatur, die deutlich unterhalb der Umgebungstemperatur liegt.

### 3.3.2 Variation der Relaxationsrate

In den vorherigen Abschnitten wurde gezeigt, dass ein getriebenes Fluss-Qubit, das an einen LC-Schwingkreis gekoppelt ist, laserartiges Verhalten zeigen kann. Im rotierenden Bezugssystem wird das Qubit durch ein Zwei-Zustand-System beschrieben, in dem sowohl Relaxations- als auch Anregungsprozesse stattfinden. Die zugehöri-

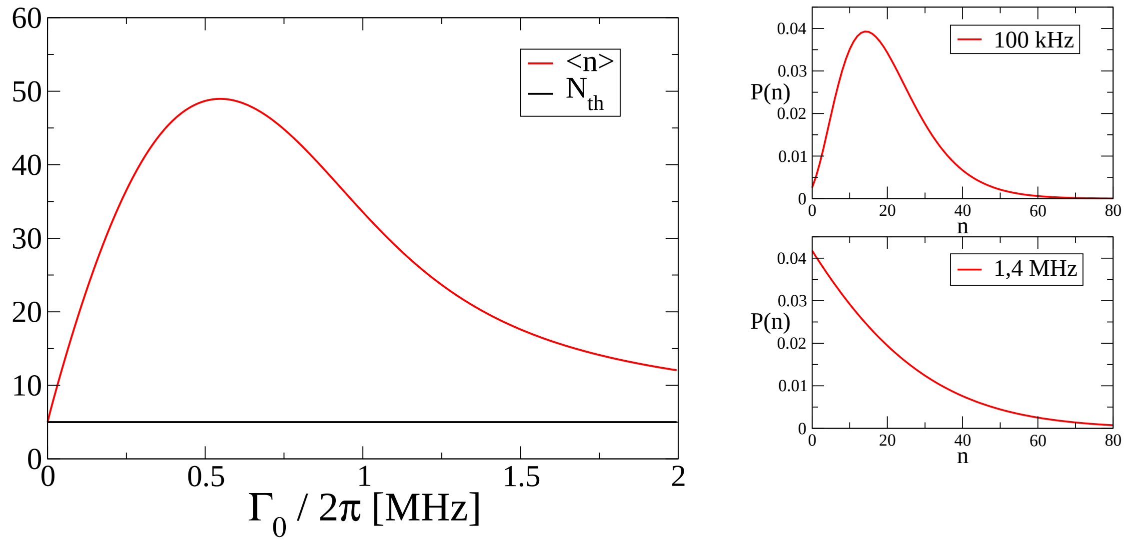


Abbildung 3.6: Großes Schaubild: Mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle$ in Abhängigkeit der Relaxationsrate $\Gamma_0$; die kleinen Schaubilder zeigen die Verteilungen $P(n)$ für zwei unterschiedliche Werte von $\Gamma_0/2\pi$.

gen Raten $\Gamma_{\uparrow,\downarrow}$ hängen direkt von der Relaxationsrate $\Gamma_0$ des Fluss-Qubits ab. Bei blauer Verstimmung des treibendes Feldes kommt es zur Inversion des Zwei-Zustand-Systems, $\Gamma_\uparrow > \Gamma_\downarrow$, und Energie fließt vom Qubit in den Oszillator.

Die Ankopplung des Fluss-Qubits an die Umgebung und die damit verbundenen Relaxationsprozesse sind somit eine wichtige Voraussetzung, um laserartiges Verhalten im Oszillator zu erreichen. Die Eigenschaften des Single-Qubit-Lasers hängen daher wesentlich von der Relaxation des Qubits ab.

Dies ist in Abbildung 3.6 demonstriert: Gezeigt ist die mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle$ in der Ein-Photon-Resonanz in Abhängigkeit der Relaxationsrate $\Gamma_0$ des Fluss-Qubits. Zur Vereinfachung der folgenden Diskussion wird dabei der Fall $g_3 = 0$ betrachtet, d.h. die Frequenzverschiebung vernachlässigt; dies hat jedoch keine Auswirkungen auf das qualitative Verhalten. In den beiden kleinen Schaubildern sind die Verteilungsfunktionen $P(n)$ für zwei feste Werte der Rate $\Gamma_0$ zu sehen; das obere Schaubild stammt aus dem Bereich des anfänglichen Anstiegs der Photonenzahl $\langle n(\Gamma_0) \rangle$, das untere aus dem Bereich des Abfallens. Obwohl die mittlere Photonenzahl in beiden Fällen gleich ist ($\langle n \rangle \approx 20$), zeigen die Verteilungen große Unterschiede.

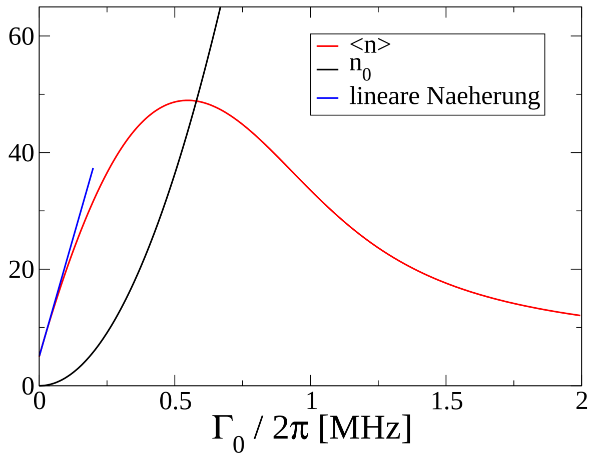


Abbildung 3.7: Vergleich der mittleren Photonenzahl mit dem Parameter $n_0$; die blaue Linie zeigt die lineare Näherung aus Gleichung 3.10.

Das nichtmonotone Verhalten der Kurve $\langle n(\Gamma_0)\rangle$ kann erklärt werden, indem die mittlere Photonenzahl mit dem Saturationsparameter $n_0$, der aus der Lasertheorie bekannt ist [34], verglichen wird. Dies ist in Abbildung 3.7 gezeigt. Dabei ist der Saturationsparameter durch $n_0 = \frac{\Gamma_1 \Gamma_\varphi}{4g_1^2}$ mit den Raten $\Gamma_1 = \Gamma_\uparrow + \Gamma_\downarrow$ und $\Gamma_\varphi = \frac{\Gamma_1}{2} + \Gamma_\varphi^*$ definiert; $g_1$ ist die Kopplungskonstante für die Ein-Photon-Kopplung aus Gleichung 3.9.

Für kleine Relaxationsraten gilt die Ungleichung $\langle n\rangle > n_0$. In diesem Bereich besitzt die mittlere Photonenzahl näherungsweise eine lineare Abhängigkeit von der Rate $\Gamma_0$ [33]:

$$\langle n\rangle \approx N_{th} + \frac{D_0}{2\kappa}\Gamma_1. \tag{3.10}$$

Um den laserartigen Zustand im Oszillator aufrechtzuerhalten, muss Energie vom Qubit in den Oszillator fließen. Diese Energie entnimmt das Qubit dem treibendem Feld im Zusammenspiel mit Relaxationsprozessen; die effektive Qubit-Oszillator-Kopplung ist deshalb durch die Relaxationsrate begrenzt.

Während die mittlere Photonenzahl $\langle n\rangle$ linear von der Rate $\Gamma_0$ abhängt, wächst der Parameter $n_0$ quadratisch mit der Relaxationsrate. Im Bereich $\langle n\rangle \approx n_0$ wird das Produkt $g_1\sqrt{n}$ vergleichbar mit der Rate $\Gamma_0$. Da die effektive Kopplung nun durch den Ausdruck $g_1\sqrt{n}$ gegeben ist, führt eine Erhöhung der Relaxationsrate nicht mehr zu einem weiteren Anwachsen der mittleren Photonenzahl. Dies spiegelt sich in dem flachen Verlauf der Kurve in diesen Bereich wider.

Eine weitere Erhöhung der Relaxationsrate hat vornehmlich Auswirkungen auf die Dephasierungsrate $\Gamma_\varphi$, die wie die Raten $\Gamma_{\uparrow,\downarrow}$ proportional zur Rate $\Gamma_0$ ist und daher ebenfalls ansteigt. Dies stört die kohärente Qubit-Oszillator-Kopplung und verursacht daher eine Absenkung der mittleren Photonenzahl $\langle n\rangle$ zum thermischen Erwartungswert $N_{th}$ hin.

Die Bereiche $\langle n\rangle \gtrless n_0$ unterscheiden sich deutlich in der Photonenverteilung, die im Oszillator vorherrscht. Im Bereich $\langle n\rangle > n_0$ ist die Verteilung $P(n)$ laserartig mit einem ausgeprägten Maximum. Für mittlere Photonenzahlen unterhalb des Saturationsparameters, $\langle n\rangle < n_0$, ähnelt sie hingegen einer thermischen Verteilung mit einer erhöhten effektiven Temperatur.

Für die Zwei-Photon-Resonanz ist eine ähnliche Einteilung möglich; dort ist der Saturationsparameter durch $n_0 = \sqrt{\frac{\Gamma_1\Gamma_\varphi}{4g_2^2}}$ definiert, wobei $g_2$ die Kopplungskonstante für Zwei-Photon-Kopplung ist. Im Bereich $n < n_0$ hängt die mittlere Photonenzahl ebenfalls linear von der Relaxationsrate ab, $\langle n\rangle \approx N_{th} + \frac{D_0}{\kappa}\Gamma_1$.

Diese Betrachtungen erklären qualitativ, warum in Abbildung 3.2 die Zwei-Photon-Resonanz höher ist als die Ein-Photon-Resonanz: In beiden Fällen liegt die Photonenzahl $\langle n\rangle$ oberhalb des Saturationsparameters ($n_0^{1P} \approx 2$, $n_0^{2P} \approx 10$), und die mittlere Photonenzahl ist deshalb durch die Rate $\Gamma_0$ bestimmt. Gemäß der obigen Formeln führt dies zu einer höheren Photonenzahl in der Zwei-Photon-Resonanz obwohl die zugehörige Kopplungskonstante $g_2$ um einen Faktor 5 kleiner ist als diejenige für die Ein-Photon-Resonanz, $g_1$. (die Werte für die Größen $D_0$ und $\Gamma_1$ sind in beiden Fällen ähnlich).

### 3.3.3 Einfluss von reiner Dephasierung

In der bisherigen Behandlung wurde im Dissipationsterm des Fluss-Qubits nur Relaxation berücksichtigt. Die Vernachlässigung von Anregungsprozessen ist gerechtfertigt, wenn die Temperatur viel kleiner ist als die Energiedifferenz der Eigenzustände des Fluss-Qubits, $k_BT \ll \Delta E$. Hingegen können im Allgemeinen reine Dephasierungsprozesse auftreten, die die Besetzung der Qubit-Zustände nicht ändern, aber die Phasenkohärenz des Zustands zerstören.

In diesem Abschnitt soll der Einfluss von zusätzlicher reiner Dephasierung des Fluss-Qubits mit einer Rate $\Gamma^*_{\varphi,0}$ beschrieben werden. Deshalb wird an dieser Stelle

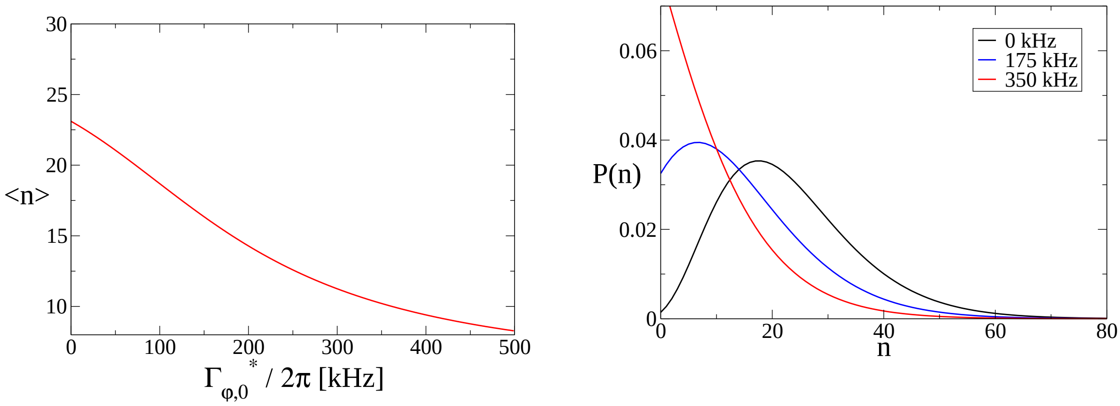


Abbildung 3.8: Links: Mittlere Photonenzahl in Abhängigkeit von $\Gamma^*_{\varphi,0}$; rechts: Verteilungsfunktion für verschiedene Werte von $\Gamma^*_{\varphi,0}$. Die Kurven stammen aus der Ein-Photon-Resonanz; wie im vorherigen Abschnitt ist hier $g_3 = 0$.

der Dissipationsterm des Qubits in der Liouville-Gleichung verallgemeinert:

$$\begin{aligned} L_Q\rho &= \frac{\Gamma_0}{2}\left(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \rho\sigma_+\sigma_- - \sigma_+\sigma_-\rho\right) \\ & \frac{\Gamma^*_{\varphi,0}}{2}\left(\sigma_z\rho\sigma_z - \rho\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dies führt zu folgenden Raten im rotierenden Bezugssystem [25]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\uparrow,\downarrow} &= \frac{\Gamma_0}{4}\left(1 \pm \sin\beta\right)^2 + \frac{\Gamma^*_{\varphi,0}}{2}\cos^2\beta \\ \Gamma^*_\varphi &= \frac{\Gamma_0}{2}\cos^2\beta + \Gamma^*_{\varphi,0}\sin^2\beta. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die Anwesenheit von $\Gamma^*_{\varphi,0}$ führt zu einer höheren Dephasierungsrate $\Gamma_\varphi$; weiterhin ist die Inversion $D_0 = \frac{\Gamma_\uparrow - \Gamma_\downarrow}{\Gamma_\uparrow + \Gamma_\downarrow} = \frac{2\Gamma_0 \sin\beta}{\Gamma_0(1+\sin^2\beta) + 2\Gamma_{\varphi,0}\cos^2\beta}$ des Qubits im Gleichgewicht mit seinem Reservoir gegenüber dem vorherigen Wert $\frac{2\sin\beta}{1+\sin^2\beta}$ reduziert.

Zusammen hat dies eine Absenkung der mittleren Photonenzahl im Resonator zur Folge. Noch deutlichere Auswirkungen hat die Anwesenheit von reiner Dephasierung des Fluss-Qubits jedoch auf die Form der Photonen-Verteilungsfunktion $P(n)$, wie in Abbildung 3.8 zu sehen ist. Analog zur Diskussion im vorherigen Abschnitt lassen sich auch hier zwei Bereiche mit unterschiedlichem Verhalten durch die Bedingung $\langle n\rangle \gtrless n_0$ unterscheiden.

Für kleine Werte der reinen Dephasierungsrate $\Gamma^*_{\varphi,0}$ ist die mittlere Photonenzahl größer als der Saturationsparameter, $\langle n\rangle > n_0 = \frac{\Gamma_1\Gamma_\varphi}{4g_1^2}$; die zugehörige laserartige

Verteilung mit dem ausgeprägten Maximum zeigt die schwarze Kurve ($\langle n \rangle \approx 23$, $n_0 \approx 2$). Mit wachsender reiner Dephasierung des Fluss-Qubits werden gemäß Gleichung 3.12 auch die Raten $\Gamma_1$, $\Gamma_\varphi$ und somit der Parameter $n_0$ größer, während die mittlere Photonenzahl sinkt. Die blaue Kurve zeigt den Übergangsbereich ($\langle n \rangle \approx n_0 \approx 15$); eine weitere Erhöhung von $\Gamma^*_{\varphi,0}$ bringt das System schließlich in die Region $\langle n \rangle > n_0$. Die zugehörige Verteilung ist durch die rote Kurve dargestellt ($\langle n \rangle \approx 10$, $n_0 \approx 33$).

# Kapitel 4

# SSET-Laser

In diesem Teil der Arbeit wird das Emissionsspektrum von Single-Qubit-Lasern untersucht, das durch die Korrelationsfunktion des Oszillators $\langle a^\dagger(t+\tau)a(t)\rangle$ bestimmt ist; Teile des Kapitels sind bereits in die Veröffentlichung [35] eingeflossen. Da die Phase des elektromagnetischen Feldes in Lasern nicht fixiert ist, sondern diffundiert, zerfällt die Funktion $\langle a^\dagger(t+\tau)a(t)\rangle$ innerhalb einer charakteristischen Zeit $\tau_d$. Diese Zerfallszeit definiert die Linienbreite des emittierten Strahlung und ist daher in der Lasertheorie eine wichtige Größe.

Zur Untersuchung der Korrelationsfunktion $\langle a^\dagger(t+\tau)a(t)\rangle$ werden Heisenberg-Langevin-Gleichungen für die Systemoperatoren benutzt. Diese Methode erlaubt es, analytische Ausdrücke für die Phasendiffusionsrate sowie die Frequenzverschiebung der emittierten Strahlung herzuleiten.

Der zweite Teil des Kapitels behandelt das sog. *injection locking*: dabei wird der Oszillator von einem kohärenten externen Signal angetrieben. Im Gegensatz zum nichtgetriebenen Fall ist die Phase dann nicht mehr gleichverteilt, was sich in einem endlichen Erwartungswert $\langle a\rangle$ für den Vernichtungsoperator niederschlägt. Der Single-Qubit-Laser verstärkt das externe Signal; mit Hilfe der Master-Gleichung für die reduzierte Dichtematrix des Single-Qubit-Lasers werden die Eigenschaften der emittierten Strahlung untersucht.

Die Phasendiffusion und das injection locking in einem Single-Qubit-Laser wurden experimentell im NEC-Experiment beobachtet. Abbildung 4.1 zeigt den schematischen Aufbau des Experiments: Ein Ladungs-Qubit ist kapazitiv an einen Wellenleiter mit der Resonanzfrequenz $\omega_0$ gekoppelt. Die kohärente Entwicklung des

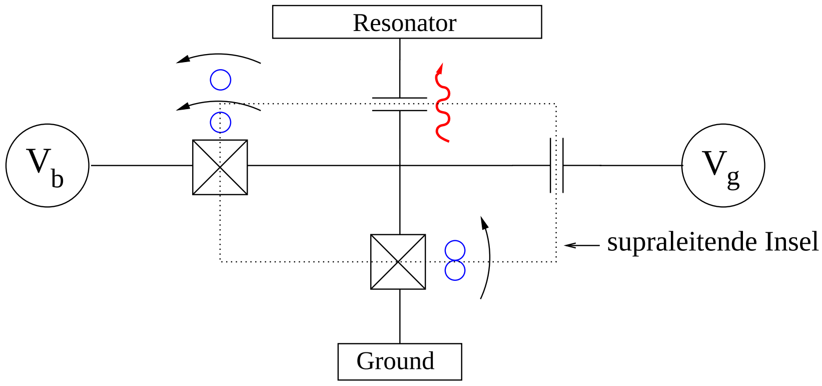


Abbildung 4.1: Schematischer Aufbau des Experiments.

Systems wird durch den Hamilton-Operator

$$H = -\frac{1}{2}\left(\epsilon_{ch}\sigma_z + E_J\sigma_x\right) + \hbar\omega_0 a^\dagger a + \hbar g_0\left(a + a^\dagger\right)\sigma_z \tag{4.1}$$

in der Basis der Ladungszustände $|0\rangle$, $|2\rangle$ beschrieben. $E_J$ ist die Josephson-Energie, $\epsilon_{ch}$ ist die elektrostatische Energiedifferenz zwischen den Ladungszuständen und hängt von der Gate-Spannung $V_g$ ab; $g_0$ ist die Kopplungskonstante. Eine Diagonalisierung führt zum Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2}\Delta E\sigma_z + \hbar\omega_0 a^\dagger a - \hbar g_0\left(\sin\zeta\sigma_z + \cos\zeta\sigma_x\right)\left(a + a^\dagger\right), \tag{4.2}$$

in dem die Größen $\Delta E$ und $\zeta$ durch $\Delta E = \sqrt{\epsilon_{ch}^2 + E_J^2}$ und $\tan\zeta = \frac{\epsilon_{ch}}{E_J}$ definiert sind. Durch Verändern der Gate-Spannung kann das Qubit in Resonanz mit dem Oszillator gebracht werden.

Wenn eine weitere Elektrode mit einer geeigneten Spannung $V_b$ an die supraleitende Insel angebracht wird, findet inkohärentes Einzel-Elektron-Tunneln aus dem Ladungs-Qubit heraus statt; das Ladungs-Qubit wir dann zu einem *supraleitenden Einzel-Elektron-Transistor* (SSET). Zweimaliges aufeinanderfolgendes Tunneln $|2\rangle \to |1\rangle \to |0\rangle$ hat inkohärente Übergänge vom Zustand $|2\rangle$ in den Zustand $|0\rangle$ mit einer Rate $\Gamma_0$ zur Folge.

In der Basis der Eigenzustände des Qubits führt dies zu Relaxations- und Anregungs- sowie reinen Dephasierungsprozessen mit Raten $\Gamma_{\uparrow,\downarrow} = \frac{\Gamma_0}{4}\left(1 \pm \sin\zeta\right)$ und $\Gamma_\varphi^* = \frac{\Gamma_0}{2}\cos^2\zeta$. Durch Einstellen der Gate-Spannung (so dass der Zustand $|0\rangle$ eine höhere Energie besitzt als der Zustand $|2\rangle$) kann der Fall $\Gamma_\uparrow > \Gamma_\downarrow$, d.h. eine Inversion des

Qubits erreicht werden. Bei resonanter Kopplung an den Oszillator lässt sich so ein Single-Qubit-Laser realisieren.

## 4.1 Modell

Es wird ein Zwei-Zustand-System mit einer Energieaufspaltung $\epsilon$ betrachtet, das an einen Oszillator mit der Resonanzfrequenz $\omega_0$ gekoppelt ist; der Einfluss von Dissipation auf das Qubit und den Oszillator wird durch die Wechselwirkung mit unabhängigen Reservoiren modelliert. Der Hamilton-Operator des Gesamtsystems ist durch

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\hbar\epsilon\sigma_z + \hbar\omega_0 a^\dagger a + \hbar g\left(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger\right) + H_N \\ &\quad + \left(N_z\sigma_z + N_+\sigma_+ + N_-\sigma_-\right) + \left(a + a^\dagger\right) N_a \end{aligned} \tag{4.3}$$

gegeben. Darin beschreibt der dritte Term Ein-Photon-Prozesse in RWA mit der Kopplungskonstanten $g$; $N_i$ sind Operatoren der Reservoire, deren freie Dynamik durch den Hamilton-Operator $H_N$ der Reservoire bestimmt ist.

Unter Verwendung der Gleichungen 2.26 und 2.32 kann die Zeitentwicklung der Operatoren des gekoppelten Qubit-Oszillator-Systems durch Heisenberg-Langevin-Gleichungen ausgedrückt werden:

$$\frac{d}{dt}\sigma_z = -2ig\left(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger\right) - \Gamma_1\left(\sigma_z - D_0\right) + F_z(t) \tag{4.4}$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_+ = -\left(\Gamma_\varphi - i\epsilon\right)\sigma_+ - ig\sigma_z a^\dagger + F_+(t) \tag{4.5}$$

$$\frac{d}{dt}a = -\left(\frac{\kappa}{2} + i\omega_0\right)a - ig\sigma_- + F_a(t). \tag{4.6}$$

Die Raten $\Gamma_1$ und $\Gamma_\varphi$ sind über die Definitionen $\Gamma_1 = \Gamma_\uparrow + \Gamma_\downarrow$ und $\Gamma_\varphi = \frac{\Gamma_1}{2} + \Gamma_\varphi^*$ mit der Relaxationsrate $\Gamma_\uparrow$, der Anregungsrate $\Gamma_\downarrow$ sowie der reinen Dephasierungsrate $\Gamma_\varphi^*$ des Qubits verknüpft; $D_0 = \frac{\Gamma_\uparrow - \Gamma_\downarrow}{\Gamma_1}$ ist die Inversion des Qubits im Gleichgewicht mit seinem Reservoir, $\kappa$ ist die Dämpfungsrate des Oszillators. Die fluktuierenden Terme $F_i(t)$ verschwinden im Mittel, $\langle F_i(t)\rangle = 0$; die Korrelationsfunktionen $\langle F_i(t)F_j(t')\rangle = D_{ij}g_{ij}(t-t')$ zerfallen auf einer Zeitskala, die sehr viel kürzer ist als die Dekohärenzeiten $\frac{1}{\Gamma_\varphi}$ und $\frac{1}{\kappa}$ des Systems. Die Diffusionskoeffizienten für das Qubit und den Oszillator sind im Kapitel 2.2.3 angegeben. Zusätzlich wird angenommen, dass die Fluktuationsterme des Qubits und des Oszillators nicht korreliert sind, $\langle F_a(t)F_z(t')\rangle = \langle F_a(t)F_+(t')\rangle = 0$.

Für den Operator $n$, der die Photonenzahl im Resonator beschreibt, lässt sich eine ähnliche Gleichung angeben:

$$\frac{d}{dt}n = ig\left(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger\right) - \kappa\left(n - N_{th}\right) + F_N(t), \tag{4.7}$$

wobei $N_{th}$ die thermische Photonenzahl bezeichnet.

## 4.2 Stationäre Gleichungen

In diesem Abschnitt werden Ausdrücke für die Erwartungswerte der Photonenzahl und der Inversion des Qubits, $\langle n \rangle$ und $\langle \sigma_z \rangle$ hergeleitet. Den Ausgangspunkt bildet die Heisenberg-Langevin-Gleichung für den Operator $\sigma_+ a$, die aus den Gleichungen 4.5 und 4.6 abgeleitet werden kann:

$$\frac{d}{dt}\left(\sigma_+ a\right) = -\left(\gamma - i\Delta\right)\sigma_+ a - ig\sigma_z n - ig\sigma_+\sigma_- + F_{+a}(t), \tag{4.8}$$

wobei $\Delta = \epsilon - \omega_0$ die Verstimmung zwischen dem Qubit und dem Oszillator ist, und die Größen $\gamma = \Gamma_\varphi + \frac{\kappa}{2}$ und $F_{+a}(t) = F_+(t)a + \sigma_+ F_a(t)$ eingeführt wurden. Diese Gleichung lässt sich durch Integration formal lösen:

$$\begin{aligned}\left(\sigma_+ a\right)(t) &= -ig\int_{-\infty}^{t} dt'\left(\sigma_z(t')n(t') + \sigma_+(t')\sigma_-(t')\right)e^{(-\gamma-i\Delta)(t-t')} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{t} dt' F_{+a}(t')e^{(-\gamma-i\Delta)(t-t')}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Durch Bildung des Mittelwerts auf beiden Seiten der Gleichungen 4.7 und 4.4 lassen sich Ausdrücke für die Größen $\langle n \rangle$ und $\langle \sigma_z \rangle$ erhalten, die jeweils von den Erwartungswerten $\langle \sigma_+ a \rangle$ und $\langle \sigma_- a^\dagger \rangle = \langle \sigma_+ a \rangle^*$ abhängen. Gleichung 4.9 liefert unter Vernachlässigung des zweiten Terms

$$\langle\left(\sigma_+ a\right)(t)\rangle = -ig\int_{-\infty}^{t} dt'\left(\langle\sigma_z(t')n(t')\rangle + \frac{\langle\sigma_z(t')\rangle + 1}{2}\right)e^{(-\gamma-i\Delta)(t-t')}, \tag{4.10}$$

wobei die Beziehung $\sigma_+\sigma_- = \frac{1}{2}\left(1 + \sigma_z\right)$ verwendet wurde. Dieser Ausdruck führt schließlich zu den Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle n(t)\rangle &= g^2\int_{-\infty}^{t} dt'\left[\left(\langle\sigma_z(t')n(t')\rangle + \frac{\langle\sigma_z(t')\rangle + 1}{2}\right)e^{(-\gamma-i\Delta)(t-t')} + c.c.\right] \\ &\quad -\kappa\left(\langle n(t)\rangle - N_{th}\right),\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\sigma_z(t)\rangle &= -2g^2\int_{-\infty}^{t} dt'\left[\left(\langle\sigma_z(t')n(t')\rangle + \frac{\langle\sigma_z(t')\rangle + 1}{2}\right)e^{(-\gamma-i\Delta)(t-t')} + c.c.\right] \\ &\quad -\Gamma_1\left(\langle\sigma_z\rangle - D_0\right).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Stationäre Lösungen mit konstanter mittlerer Photonenzahl und Inversion sind durch die Gleichungen $\frac{d}{dt}\langle n(t)\rangle = 0$, $\frac{d}{dt}\langle \sigma_z(t)\rangle = 0$ gekennzeichnet. Für diese Lösungen gelten die beiden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \langle n\rangle &= N_{th} + \frac{2g^2}{\kappa}\frac{\gamma}{\gamma^2+\Delta^2}\left(\langle\sigma_z n\rangle + \frac{1}{2}\langle\sigma_z\rangle + \frac{1}{2}\right) && (4.13)\\ \langle\sigma_z\rangle &= D_0 - \frac{4g^2}{\Gamma_1}\frac{\gamma}{\gamma^2+\Delta^2}\left(\langle\sigma_z n\rangle + \frac{1}{2}\langle\sigma_z\rangle + \frac{1}{2}\right). && (4.14)\end{aligned}$$

Dies sind zwei Gleichungen für die drei Erwartungswerte $\langle n\rangle$, $\langle\sigma_z\rangle$ und $\langle\sigma_z n\rangle$. Daher lassen sie sich ohne weitere Eingaben nicht lösen.

Eine mögliche Näherung ist die Faktorisierung $\langle\sigma_z n\rangle \approx \langle\sigma_z\rangle\langle n\rangle$. Die daraus resultierende Theorie ist in der Quantenoptik als *semi-quantum model* bekannt [36] und ergibt geschlossene Gleichungen für $\langle n\rangle$ und $\langle\sigma_z\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle n\rangle &= N_{th} + \frac{2g^2}{\kappa}\frac{\gamma}{\gamma^2+\Delta^2}\left(\langle\sigma_z\rangle\langle n\rangle + \frac{1}{2}\langle\sigma_z\rangle + \frac{1}{2}\right) && (4.15)\\ \langle\sigma_z\rangle &= D_0 - 2\frac{\kappa}{\Gamma_1}\left(\langle n\rangle - N_{th}\right). && (4.16)\end{aligned}$$

Das Einsetzen des zweiten in den ersten Ausdruck ergibt eine quadratische Gleichung für die mittlere Photonenzahl $\langle n\rangle$, aus der sich dann auch der Erwartungswert$\langle\sigma_z\rangle$ einfach bestimmen lässt. Mit Hilfe der Definition $\tilde{n}_0 = \frac{\Gamma_1\Gamma_\varphi}{4g^2}\left(1+\frac{\Delta^2}{\Gamma_\varphi^2}\right)$ lässt sich diese Gleichung als

$$\langle n\rangle^2 + \left[\tilde{n}_0 - N_{th} + \frac{1}{2} - \frac{\Gamma_1 D_0}{2\kappa}\right]\langle n\rangle + \left[-N_{th}\tilde{n}_0 - \frac{1}{2}N_{th} - \frac{\Gamma_1(D_0+1)}{4\kappa}\right] = 0 \quad (4.17)$$

schreiben und besitzt genau eine positive Lösung.

Die Näherung $\langle\sigma_z n\rangle \approx \langle\sigma_z\rangle\langle n\rangle$ erlaubt eine analytische Berechnung der Erwartungswerte $\langle\sigma_z\rangle$ und $\langle n\rangle$. Alternativ dazu ist auch eine numerische Berechnung durch Lösung der Master-Gleichung für die reduzierte Dichtematrix des gekoppelten Qubit-Oszillator-Systems, wie im dritten Kapitel besprochen, möglich.

Für die Schaubilder werden, falls nicht anders angegeben, in diesem Kapitel folgende Parameter verwendet: $\epsilon = \omega_0$ für das Qubit, $g/\omega_0 = 4\cdot 10^{-3}$ für die Kopplungskonstante, $\Gamma_1/\omega_0 = 0,026$ für die Summe aus Relaxations- und Anregungsrate, $\Gamma_\varphi/\omega_0 = 0,019$ für die Dephasierungsrate, $D_0 = 0,975$ für die Inversion des Qubits

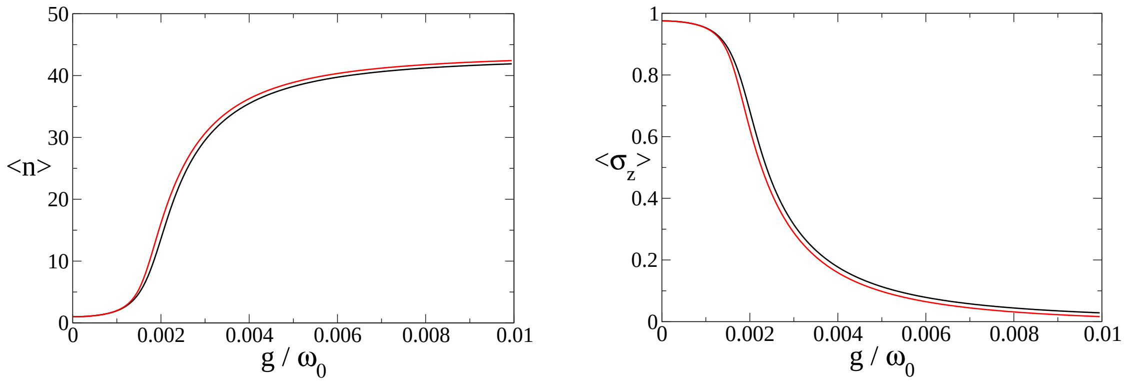


Abbildung 4.2: Vergleich der numerischen (schwarze Kurven) und analytischen Lösung (rote Kurven) für die Erwartungswerte der Photonenzahl und der Inversion.

im Gleichgewicht mit seinem Reservoir, $\kappa/\omega_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ für die Dämpfungsrate des Oszillators und $N_{th} = 1$ für die thermische Photonenzahl.

In Abbildung 4.2 sind die analytischen Lösungen für die Erwartungswerte $\langle n \rangle$ und $\langle \sigma_z \rangle$ mit den numerischen Lösungen verglichen. Dabei zeigen sich nur kleine Abweichungen zwischen beiden Kurven, insbesondere reproduzieren sie das gleiche Verhalten: für kleine Werte der Kopplungskonstanten $g$ befinden sich das Qubit und der Oszillator im Gleichgewicht mit ihren Reservoiren, was sich in den Beziehungen $\langle n \rangle \approx N_{th} = 1$ und $\langle \sigma_z \rangle \approx D_0$ ausdrückt.

Bei einer gewissen Kopplungsstärke findet jedoch ein rascher Anstieg der mittleren Photonenzahl statt, verbunden mit einer Verminderung der Inversion; dies kennzeichnet den Übergang des Systems in den laserartigen Zustand. Für größere Werte der Kopplungskonstanten $g$ verlaufen die Kurven wieder flach: die mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle$ nähert sich einem festen Wert, während der Erwartungswert der Inversion $\langle \sigma_z \rangle$ gegen Null strebt.
In Abbildung 4.3 wird der Erwartungswert $\langle \sigma_z n \rangle$ mit dem Produkt $\langle \sigma_z \rangle \langle n \rangle$ verglichen; die Ergebnisse stammen aus der Lösung der Master-Gleichung. Für kleine Werte der Kopplungskonstanten $g$ zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Für größere Werte jedoch beginnen die Kurven auseinanderzulaufen, wobei der relative Abstand mit steigender Kopplungsstärke anwächst.

Dies erklärt die Abweichungen zwischen den analytischen und den numerischen Ergebnissen für die Erwartungswerte $\langle n \rangle$ und $\langle \sigma_z \rangle$. Dort sind die relativen Unter-

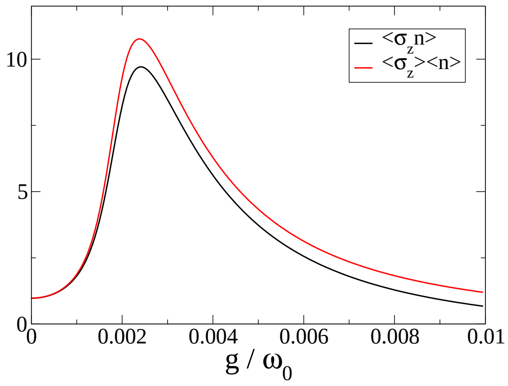


Abbildung 4.3: Vergleich des Erwartungswerts $\langle\sigma_z n\rangle$ mit dem Produkt $\langle\sigma_z\rangle\langle n\rangle$; die Ergebnisse stammen aus der numerischen Lösung der Master-Gleichung.

schiede nur gering; wie sich allerdings zeigen wird, gibt es große Abweichungen bei der Berechnung der Linienbreite im Bereich der starken Kopplung. Deshalb ist die Näherung $\langle\sigma_z n\rangle \approx \langle\sigma_z\rangle\langle n\rangle$ dort nicht zulässig.

Die Gleichungen 4.13 und 4.14 lassen sich also im Allgemeinen nicht geschlossen lösen. Allerdings können sie in jedem Fall verwendet werden, um bei Kenntnis einer der Größen $\langle\sigma_z\rangle$, $\langle n\rangle$ oder $\langle\sigma_z n\rangle$ die übrigen Erwartungswerte zu berechnen.

## 4.3 Phasendiffusion

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Berechnung der Korrelationsfunktion $\langle a^\dagger(t+\tau)a(t)\rangle$ des Oszillators. Die Zeit $t$ wird dabei als groß angenommen, so dass sich das System in einem stationären Zustand befindet. Die Heisenberg-Langevin-Gleichung für den Erzeugungsoperator $a^\dagger(t)$ (die sich durch komplexes Konjugieren von Gleichung 4.6 ergibt) führt zu der Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(a^\dagger(t+\tau)a(t)\right) &= \left(\frac{d}{d\tau}a^\dagger(t+\tau)\right)a(t)\\ &= -\left(\frac{\kappa}{2}-i\omega_0\right)a^\dagger(t+\tau)a(t) + ig\sigma_+(t+\tau)a(t) + F_a^\dagger(t+\tau)a(t). \quad (4.18)\end{aligned}$$

Die freie Zeitentwicklung $\sim e^{i\omega_0\tau}$ kann durch den Wechsel zu den Operatoren $\tilde{a}^{(\dagger)}(t) = a^{(\dagger)}(t)e^{\pm i\omega_0 t}$ und $\tilde{\sigma}_+(t) = \sigma_+(t)e^{-i\omega_0 t}$ eliminiert werden. Durch Bildung des Mittelwerts und unter Vernachlässigung des letzten Terms lässt sich dann die Gleichung

$$\frac{d}{d\tau}\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle = -\frac{\kappa}{2}\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle + ig\langle\tilde{\sigma}_+(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle \tag{4.19}$$

erhalten; das gleiche Vorgehen für die Korrelationsfunktion $\langle\tilde{\sigma}_+(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle$ liefert den Ausdruck

$$\frac{d}{d\tau}\langle\tilde{\sigma}_+(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle = -\left(\Gamma_\varphi - i\Delta\right)\langle\tilde{\sigma}_+(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle - ig\langle\sigma_z(t+\tau)\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle. \tag{4.20}$$

Wenn die Dephasierungsrate des Qubits viel größer ist als die Dämpfungsrate des Oszillators, $\Gamma_\varphi \gg \frac{\kappa}{2}$, kann die Korrelationsfunktion $\langle\tilde{\sigma}_+(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle$ in Gleichung 4.19 durch die adiabatische Lösung $\langle\tilde{\sigma}_+(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle = \frac{-ig}{\Gamma_\varphi - i\Delta}\langle\sigma_z(t+\tau)\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle$ ersetzt werden, was die Gleichung

$$\frac{d}{d\tau}\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle = -\frac{\kappa}{2}\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle + \frac{g^2}{\Gamma_\varphi - i\Delta}\langle\sigma_z(t+\tau)\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle \tag{4.21}$$

ergibt.

### 4.3.1 Auswertung der Korrelationsfunktionen

Zur Vereinfachung der Gleichung 4.21 wird der Operator $a$ in Amplitude und Phase aufgespalten, $a(t) = \sqrt{n(t)+1}\, e^{-i\varphi(t)}$. Desweiteren wird die Annahme gemacht, dass die Korrelationszeit $t_d$ der Phasenfluktuationen viel größer ist als die Korrelationszeit $t_a$ der Amplitudenfluktuationen, und dass die mittlere Photonenzahl viel größer ist als 1, $\langle n\rangle \gg 1$. Dies erlaubt es, für Zeiten $t > t_a$ die Näherung

$$\langle\sigma_z(t+\tau)\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle \approx \langle\sigma_z(t+\tau)\sqrt{n(t+\tau)}\rangle\langle\sqrt{n(t)}\, e^{i\varphi(t+\tau)}e^{-i\varphi(t)}\rangle \tag{4.22}$$

vorzunehmen. Die gleiche Näherung lässt sich auch für die Korrelationsfunktion $\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle$ machen. Damit ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle &= -\left(\frac{\kappa}{2} - \frac{g^2}{\Gamma_\varphi - i\Delta}\frac{\langle\sigma_z\sqrt{n}\rangle}{\langle\sqrt{n}\rangle}\right)\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle \\ &= \left(-\kappa_d + i\delta\omega_0\right)\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle.\end{aligned} \tag{4.23}$$

In der zweiten Zeile wurden der Real- und Imaginärteil innerhalb der Klammer getrennt. Der Einfluss des Qubits auf die Korrelationsfunktion des Oszillators äußert sich in einer Änderung der Phasendiffusionsrate $\kappa_d = \frac{\kappa}{2} - \frac{g^2\Gamma_\varphi}{\Gamma_\varphi^2+\Delta^2}\frac{\langle\sigma_z\sqrt{n}\rangle}{\langle\sqrt{n}\rangle}$ und einer Frequenzverschiebung $\delta\omega_0 = \frac{g^2\Delta}{\Gamma_\varphi^2+\Delta^2}\frac{\langle\sigma_z\sqrt{n}\rangle}{\langle\sqrt{n}\rangle}$. Zur Berechnung dieser Größen wird im

Folgenden der Ausdruck $\frac{\langle\sigma_z\sqrt{n}\rangle}{\langle\sqrt{n}\rangle}$ ausgewertet.

Die Operatoren $\sigma_z$ und $n$ lassen sich jeweils als Summe ihres Mittelwerts und eines fluktuierenden Terms schreiben: $\sigma_z = \langle\sigma_z\rangle + \delta\sigma_z$ und $n = \langle n\rangle + \delta n$. Unter der Annahme, dass die Fluktuationen der Photonenzahl kleiner sind als der Mittelwert, $\sqrt{\langle\delta n^2\rangle} < \langle n\rangle$, lässt sich die Näherung $\sqrt{\langle n\rangle + \delta n} \approx \langle\sqrt{n}\rangle + \frac{1}{2}\frac{\delta n}{\langle\sqrt{n}\rangle}$ vornehmen. Dies ergibt die Gleichung

$$\frac{\langle\sigma_z\sqrt{n}\rangle}{\langle\sqrt{n}\rangle} = \frac{\langle(\langle\sigma_z\rangle + \delta\sigma_z)\left(\langle\sqrt{n}\rangle + \frac{1}{2}\frac{\delta n}{\langle\sqrt{n}\rangle}\right)\rangle}{\langle\sqrt{n}\rangle} = \langle\sigma_z\rangle + \frac{\langle\delta\sigma_z\,\delta n\rangle}{2\langle n\rangle}. \tag{4.24}$$

Dieser Ausdruck kann mit Hilfe der Beziehung $\langle\sigma_z n\rangle = \langle\sigma_z\rangle\langle n\rangle + \langle\delta\sigma_z\delta n\rangle$ weiter vereinfacht werden, was schließlich zu der Gleichung

$$\frac{\langle\sigma_z\sqrt{n}\rangle}{\langle\sqrt{n}\rangle} = \frac{1}{2}\left[\langle\sigma_z\rangle + \frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}\right] \tag{4.25}$$

führt.

### 4.3.2 Phasendiffusionsrate und Frequenzverschiebung

Das Emissionsspektrum $S(\omega)$ des Oszillators ist proportional zur Fouriertransformierten der Korrelationsfunktion $\langle a^\dagger(t+\tau)a(t)\rangle$ [37]. Mit Hilfe von Gleichung 4.23 ergibt sich für das Spektrum eine Lorentzkurve der Breite $\kappa_d$, die um die Frequenz $\omega_d = \omega_0 + \delta\omega_0$ herum zentriert ist:

$$\mathsf{Re}\,S(\omega) \sim \frac{\kappa_d\,\langle n\rangle}{(\omega-\omega_d)^2 + \kappa_d^2}. \tag{4.26}$$

Die im letzten Abschnitt vorgenommenen Näherungen erlauben es, mit Hilfe der Gleichung 4.25 analytische Ausdrücke für die Phasendiffusionsrate und die Frequenzverschiebung zu finden:

$$\kappa_d = \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{2}\frac{g^2\Gamma_\varphi}{\Gamma_\varphi^2 + \Delta^2}\left(\langle\sigma_z\rangle + \frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}\right) \tag{4.27}$$

$$\delta\omega_0 = \frac{1}{2}\frac{g^2\Delta}{\Gamma_\varphi^2 + \Delta^2}\left(\langle\sigma_z\rangle + \frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}\right) \tag{4.28}$$

$$\tag{4.29}$$

Mit Hilfe der Gleichungen 4.13 und 4.14 lässt sich der Erwartungswert $\langle\sigma_z n\rangle$ eliminieren, so dass die resultierenden Ausdrücke nur noch die Größen $\langle n\rangle$ und $\langle\sigma_z\rangle$

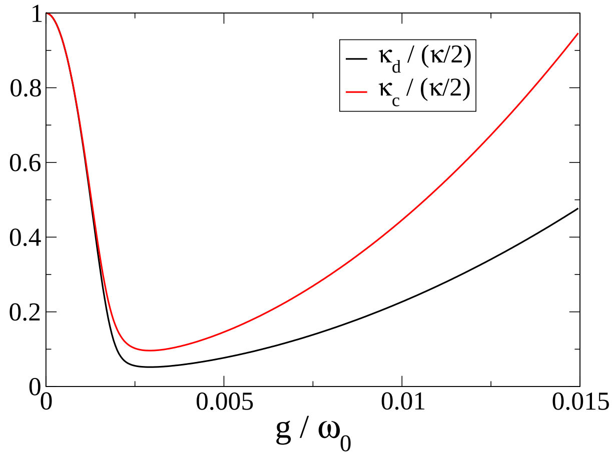


Abbildung 4.4: Phasendiffusionsrate $\kappa_d$ in Abhängigkeit der Kopplungskonstanten $g$; die rote Linie kennzeichnet die Lösung $\kappa_c$ aus dem semi-quantum model, das die Korrelationen zwischen den Operatoren $\sigma_z$ und $n$ vernachlässigt.

enthalten:

$$\kappa_d = \frac{\kappa}{4} - \frac{1}{2}\frac{g^2\Gamma_\varphi}{\Gamma_\varphi^2+\Delta^2}\langle\sigma_z\rangle + \frac{g^2\Gamma_\varphi}{\Gamma_\varphi^2+\Delta^2}\frac{\langle\sigma_z\rangle+1}{4\langle n\rangle} + \frac{\kappa}{4}\frac{N_{th}}{\langle n\rangle} \tag{4.30}$$

$$\delta\omega_0 = \frac{\Delta}{2}\left[\frac{\kappa}{2\Gamma_\varphi} + \frac{g^2}{\Gamma_\varphi^2+\Delta^2}\langle\sigma_z\rangle - \frac{g^2}{\Gamma_\varphi^2+\Delta^2}\frac{\langle\sigma_z\rangle+1}{2\langle n\rangle} - \frac{\kappa}{2\Gamma_\varphi}\frac{N_{th}}{\langle n\rangle}\right] \tag{4.31}$$

Abbildung 4.4 zeigt die Phasendiffusionsrate $\kappa_d$ in Abhängigkeit der Kopplungskonstanten $g$; die benötigten Erwartungswerte $\langle n\rangle$ und $\langle\sigma_z\rangle$ wurden dabei mit Hilfe der Master-Gleichung berechnet. Die Rate $\kappa_d$ sinkt zunächst, ausgehend von dem Wert $\frac{\kappa}{2}$, auf ein Minimum, und steigt dann mit wachsender Kopplung wieder an. Zum Vergleich ist auch die Rate $\kappa_c$ eingezeichnet, die sich durch die Faktorisierung des Erwartungswerts $\langle\sigma_z n\rangle$ ergibt. Die beiden Kurven stimmen nur für kleine Werte der Kopplungskonstanten $g$ überein; im übrigem Bereich ist die Rate $\kappa_d$ deutlich kleiner als die Rate $\kappa_c$.

Um diesen Unterschied deutlich zu machen, lassen sich die obigen Ausdrücke für die Phasendiffusionsrate auch in folgender Form schreiben:

$$\kappa_d = \frac{\kappa}{2}\frac{N_{th}}{\langle n\rangle} + \frac{g^2\Gamma_\varphi}{2\langle n\rangle}\frac{(\langle\sigma_z\rangle+1)}{\Gamma_\varphi^2+\Delta^2} + \frac{g^2\Gamma_\varphi}{\Gamma_\varphi^2+\Delta^2}\frac{\langle\sigma_z n\rangle - \langle\sigma_z\rangle\langle n\rangle}{2\langle n\rangle} \tag{4.32}$$

$$\delta\omega_0 = \frac{\Delta}{2\langle n\rangle}\left[\frac{\kappa(\langle n\rangle - N_{th})}{\Gamma_\varphi} - g^2\frac{\langle\sigma_z+1\rangle}{\Gamma_\varphi^2+\Delta^2}\right] - \frac{g^2\Delta}{\Gamma_\varphi^2+\Delta^2}\frac{\langle\sigma_z n\rangle - \langle\sigma_z\rangle\langle n\rangle}{2\langle n\rangle} \tag{4.33}$$

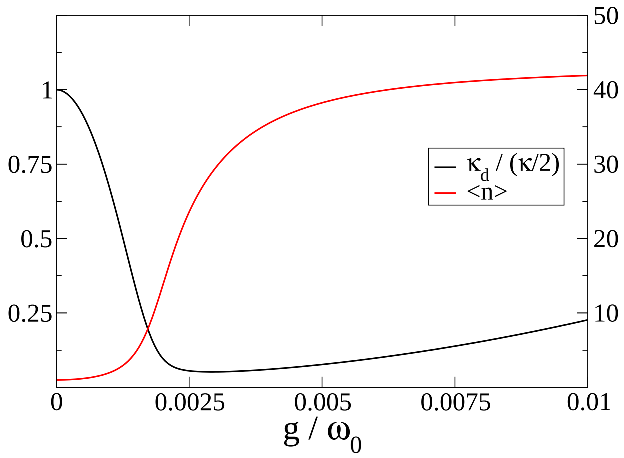


Abbildung 4.5: Phasendiffusionsrate $\kappa_d$ und mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle$ in Abhängigkeit der Kopplungskonstanten $g$.

Die Formeln setzen sich dabei aus jeweils zwei Teilen zusammen: Der erste Beitrag ist das Ergebnis, das aus einer Behandlung im Rahmen des semi-quantum models, d.h. der Faktorisierung $\langle \sigma_z n \rangle = \langle \sigma_z \rangle \langle n \rangle$ folgen würde; der zweite Beitrag berücksichtigt die Korrelationen zwischen den Operatoren $\sigma_z$ und $n$.

In Abbildung 4.5 ist neben der Phasendiffusionsrate $\kappa_d$ auch die mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle$ im Oszillator eingezeichnet. In einem schmalen Wertebereich der Kopplungskonstanten $g$ steigt die Photonenzahl $\langle n \rangle$ vom thermischen Gleichgewicht $\langle n \rangle = N_{th} = 1$ ausgehend auf einen nahezu konstanten Wert $\langle n \rangle \approx 40$; in diesem Bereich erreicht die Phasendiffusionsrate ihr Minimum (dort beginnt die Rate $\kappa_d$ sich auch deutlich vom Wert $\kappa_c$ zu unterscheiden); für größere Kopplungsstärken, wenn die Photonenzahl saturiert, wächst die Rate $\kappa_d$ mit der Kopplungskonstanten.

Abbildung 4.6 zeigt schließlich die Phasendiffusionsrate $\kappa_d$ als Funktion der Kopplungskonstanten $g$ und der reinen Dephasierungsrate $\Gamma_\varphi^*$. Für kleine Werte der Kopplung $g$ fällt die Rate $\kappa_d$ rasch auf ihr Minimum ab. In diesem Bereich begünstigt eine kleine Dephasierungsrate laserartiges Verhalten des Oszillators, was zu einem kleineren Wert für die Rate $\kappa_d$ führt. Für starke Kopplung hingegen ist die mittlere Photonenzahl weitgehend unabhängig von der Dephasierungsrate $\Gamma_\varphi^*$; in diesem Bereich wirkt die Dephasierung dem Anwachsen der Rate $\kappa_d$ mit steigender Kopplung $g$ entgegen, weshalb hier eine größere Dephasierung eine kleinere Phasen-

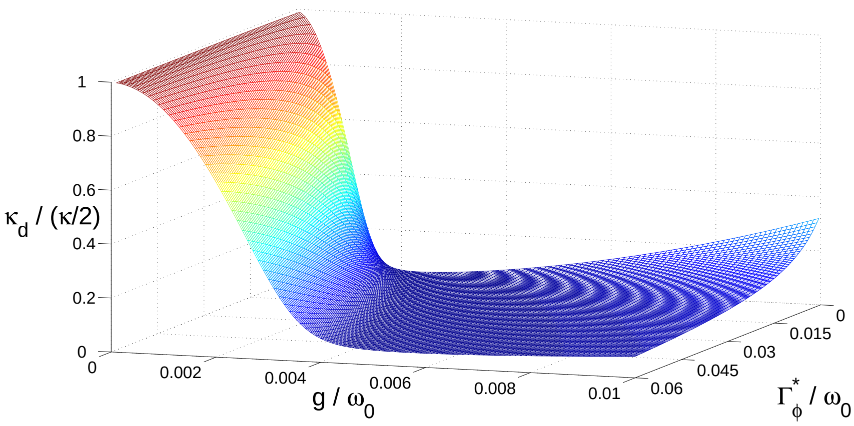


Abbildung 4.6: Phasendiffusionsrate $\kappa_d$ als Funktion der Kopplungskonstanten $g$ und der reinen Dephasierungsrate $\Gamma_\varphi^*$.

diffusionsrate zur Folge hat.

Außerhalb der Resonanz $\epsilon = \omega_0$ tritt neben einer Verringerung der Linienbreite auch eine Frequenzverschiebung in der vom Oszillator emittierten Strahlung auf; dies ist in Abbildung 4.7 demonstriert. Für kleine Werte der Kopplungskonstanten $g$ ist die Frequenzverschiebung weitgehend unabhängig von der Verstimmung $\Delta = \epsilon - \omega_0$ und wächst mit der Kopplungskonstanten. Im Kontrast dazu laufen die Kurven im Bereich starker Kopplung auseinander und hängen nur noch schwach von der Kopplungsstärke ab; dort ist die Frequenzverschiebung proportional zu der Verstimmung $\Delta$.

## 4.4 Injection locking

In diesem Abschnitt wird das Verhalten des Single-Qubit-Lasers unter dem Einfluss eines äußeren Feldes betrachtet, das den Oszillator antreibt. Dazu wird der Hamilton-Operator 4.3 um den Term $\hbar E_0 a e^{i\omega_{dr}t} + \hbar E_0^* a^\dagger e^{-i\omega_{dr}t}$ erweitert, der ein monochromatisches Feld der Amplitude $E_0$ und Frequenz $\omega_{dr}$ beschreibt, das an den Oszillator koppelt.

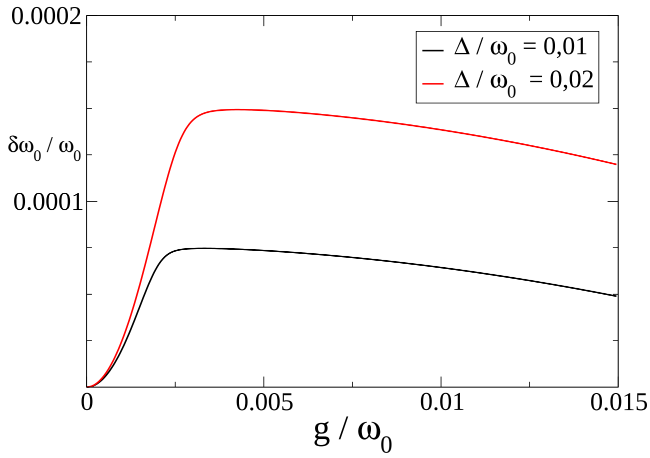


Abbildung 4.7: Frequenzverschiebung $\delta\omega_0$ als Funktion der Kopplungskonstanten $g$ für zwei feste Werte der Verstimmung $\Delta = \epsilon - \omega_0$.

### 4.4.1 Analytische Ergebnisse in Resonanz

Bevor der allgemeine Fall numerisch untersucht wird, werden hier einige analytische Ergebnisse für den resonanten Fall $\omega_{dr} = \omega_0 = \epsilon$ präsentiert. Der neue Term im Hamilton-Operator modifiziert die Heisenberg-Langevin-Gleichung für den Erzeugungsoperator $a^\dagger$:

$$\frac{d}{dt}a^\dagger = -\left(\frac{\kappa}{2} - i\omega_0\right) a^\dagger + ig\sigma_+ + iE_0 e^{i\omega_{dr}t} + F_a^\dagger(t). \tag{4.34}$$

Der Wechsel zu den Variablen $\tilde{a}^\dagger = a^\dagger e^{-i\omega_0 t}$ und $\tilde{\sigma}_+ = \sigma_+ e^{-i\omega_0 t}$ unter Ausnutzung der Resonanzbedingung $\omega_{dr} = \omega_0$ ergibt die Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\langle\tilde{a}^\dagger\rangle = -\frac{\kappa}{2}\langle\tilde{a}^\dagger\rangle + ig\langle\tilde{\sigma}_+\rangle + iE_0. \tag{4.35}$$

Die Heisenberg-Langevin-Gleichung 4.5 für den Qubit-Operator $\sigma_+$ bleibt weiterhin gültig. Für den Fall, dass die Dephasierungsrate des Qubits viel größer ist als die Dämpfungsrate des Oszillators, $\Gamma_\varphi \gg \frac{\kappa}{2}$, lässt sich der Ausdruck $\langle\tilde{\sigma}_+\rangle$ in der Gleichung für den Erwartungswert $\langle\tilde{a}\rangle$ durch die adiabatische Lösung $\langle\tilde{\sigma}_+\rangle = \frac{-ig}{\Gamma_\varphi}\langle\sigma_z\tilde{a}^\dagger\rangle$ ersetzen, was zu der Gleichung

$$\frac{d}{dt}\langle\tilde{a}^\dagger\rangle = -\frac{\kappa}{2}\langle\tilde{a}^\dagger\rangle + \frac{g^2}{\Gamma_\varphi}\langle\sigma_z\tilde{a}^\dagger\rangle + iE_0 \tag{4.36}$$

führt. Im Unterschied zum nichtgetriebenen Fall besitzt der Erzeugungsoperator einen endlichen Erwartungswert, $\langle\tilde{a}^{(\dagger)}\rangle \neq 0$, da die Phase des elektromagnetischen

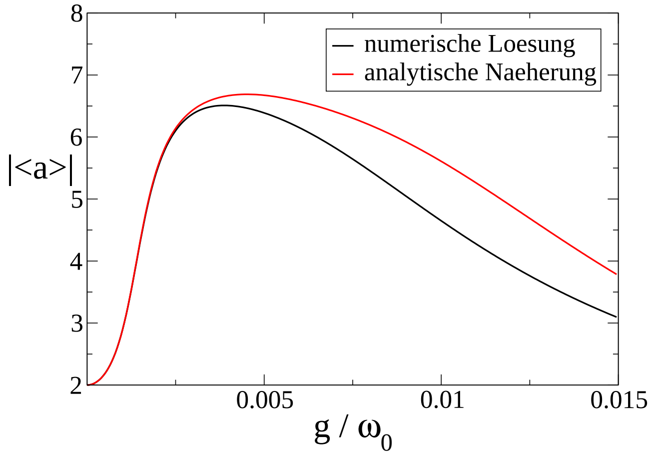


Abbildung 4.8: Betrag des Erwartungswerts $\langle a^{(\dagger)}\rangle$ in Abhängigkeit der Kopplungskonstanten g; die Amplitude des externen Feldes hat den Wert $E_0 = 2\cdot(\kappa/2)$.

Feldes nicht mehr gleichverteilt, sondern um einen festen Wert herum fixiert ist. Die Näherung $\langle\sigma_z\tilde{a}^\dagger\rangle \approx \frac{1}{2}\left(\langle\sigma_z\rangle + \frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}\right)\langle\tilde{a}^\dagger\rangle$ analog zum vorherigen Abschnitt liefert einen analytischen Ausdruck für die zeitlich konstante Lösung $\frac{d}{dt}\langle\tilde{a}^\dagger\rangle = 0$:

$$\langle\tilde{a}^\dagger\rangle = \frac{iE_0}{\bar{\kappa}_d}, \tag{4.37}$$

wobei die Größe $\bar{\kappa}_d$ über die Beziehung $\bar{\kappa}_d = \frac{\kappa}{2} - \frac{g^2}{\Gamma_\varphi}\frac{1}{2}\left(\langle\sigma_z\rangle + \frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}\right)$ definiert ist. Mit Hilfe der Gleichungen für die Erwartungswerte $\langle n\rangle$ und $\langle\sigma_z\rangle$ lässt sich die Näherung $\bar{\kappa}_d \approx \frac{1}{2}\left(\kappa_d + \sqrt{\kappa_d^2 + 2|E_0|^2/\langle n\rangle}\right)$ vornehmen, wobei die Rate $\kappa_d$ durch die Formel $\kappa_d = \frac{\kappa}{4} - \frac{g^2}{2\Gamma_\varphi}\langle\sigma_z\rangle + \frac{g^2}{4\Gamma_\varphi}\frac{\langle\sigma_z\rangle+1}{\langle n\rangle} + \frac{\kappa}{4}\frac{N_{th}}{\langle n\rangle}$ gegeben ist.

Abbildung 4.8 zeigt den Betrag $|\langle\tilde{a}^\dagger\rangle| = |\langle\tilde{a}\rangle|$ des Erwartungswerts $\langle a^\dagger\rangle$ in Abhängigkeit der Kopplungskonstanten $g$. Im ungekoppelten Fall $g = 0$ gelten die Beziehungen $\bar{\kappa}_d = \frac{\kappa}{2}$ und $|\langle\tilde{a}^\dagger\rangle| = \frac{E_0}{\kappa/2}$. Mit steigender Kopplungsstärke wächst die Amplitude $|\langle\tilde{a}^\dagger\rangle|$ zunächst auf einen maximalen Wert an; für große Werte der Kopplungskonstanten $g$ hingegen sinkt sie wieder. Dieser Verlauf ist analog zum nichtmonotonen Verhalten der Phasendiffusionsrate aus dem vorherigen Abschnitt.

Die rote Kurve benutzen die analytische Näherung aus Gleichung 4.37; die schwarze Kurve zeigt das Ergebnis der direkten numerischen Berechnung des Erwartungswerts $\langle a^\dagger\rangle$ aus der Master-Gleichung. Für starke Kopplung zeigen sich Abweichungen zwischen beiden Kurven. Der Grund hierfür sind Korrelationen zwischen der

Amplitude und der Phase des elektromagnetischen Feldes, so dass die Näherung $\langle\sigma_z\tilde{a}^\dagger\rangle/\langle\tilde{a}^\dagger\rangle \approx \langle\sigma_z\sqrt{n}\rangle/\langle\sqrt{n}\rangle$ in diesem Bereich nicht mehr gültig ist.

Die Anwesenheit eines externen Feldes hat auch Auswirkungen auf die Korrelationsfunktion $\frac{d}{d\tau}\langle a^\dagger(t+\tau)a(t)\rangle$ des Oszillators; die zugehörige Gleichung 4.21 erhält nun einen zusätzlichen Term $\sim E_0$:

$$\frac{d}{d\tau}\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle = -\frac{\kappa}{2}\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle + \frac{g^2}{\Gamma_\varphi}\langle\sigma_z(t+\tau)\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle + iE_0\langle\tilde{a}\rangle. \quad (4.38)$$

Die Näherung $\langle\sigma_z(t+\tau)\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle \approx \frac{\langle\sigma_z\sqrt{n}\rangle}{\langle\sqrt{n}\rangle}\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle$ analog zum vorherigen Abschnitt führt dann zu der Gleichung

$$\frac{d}{d\tau}\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle = -\bar{\kappa}_d\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle + iE_0\langle\tilde{a}\rangle. \quad (4.39)$$

Die Korrelationsfunktion zerfällt mit einer Rate $\bar{\kappa}_d$; im Gegensatz zum nichtgetriebenen Fall strebt sie allerdings für große Zeiten $\tau$ gegen den endlichen Wert $\frac{iE_0}{\bar{\kappa}_d}\langle\tilde{a}\rangle = |\langle\tilde{a}\rangle|^2$.

Unter Verwendung der Anfangsbedingung $\langle\tilde{a}^\dagger(t)\tilde{a}(t)\rangle = \langle n\rangle$ lässt sich die Lösung $\langle\tilde{a}^\dagger(t+\tau)\tilde{a}(t)\rangle = |\langle\tilde{a}\rangle|^2 + [\langle n\rangle - |\langle\tilde{a}\rangle|^2]\, e^{-\bar{\kappa}_d\tau}$ berechnen; für das Emissionsspektrum $S(\omega)$ ergibt sich damit:

$$\mathsf{Re}\, S(\omega) \sim \frac{\bar{\kappa}_d\, (\langle n\rangle - |\langle\tilde{a}\rangle|^2)}{(\omega-\omega_0)^2 + \bar{\kappa}_d^2} + \pi\, |\langle\tilde{a}\rangle|^2\, \delta(\omega-\omega_0). \quad (4.40)$$

Das Spektrum $S(\omega)$ enthält nun zwei Beiträge: eine Lorentzkurve der Breite $\bar{\kappa}_d$ , deren Höhe proportional zur Differenz $\langle n\rangle - |\langle\tilde{a}\rangle|^2$ ist, und einen schmalen Peak, dessen Höhe proportional zum Quadrat des Erwartungswert $\langle\tilde{a}^{(\dagger)}\rangle$ ist. Der zweite Beitrag wird durch das externe treibende Feld erzeugt; die Delta-Funktion ist eine Folge der Annahme, dass dieses Feld monochromatisch ist, d.h. keine Linienbreite besitzt. Im ungekoppelten Fall $g = 0$ gilt die Beziehung $|\langle\tilde{a}\rangle|^2 = \left(E_0/\frac{\kappa}{2}\right)^2$. Wenn das Qubit an den Oszillator gekoppelt ist, vergrößert sich der Wert $|\langle\tilde{a}\rangle|^2$ (siehe Abbildung 4.8); der Single-Qubit-Laser verstärkt somit das äußere Signal.

Abbildung 4.9 illustriert, wie die Antriebsleistung das Emissionsspektrum beeinflusst: Mit wachsender Amplitude des treibenden Feldes wächst auch das Quadrat $|\langle a\rangle|^2$ und nähert sich der mittleren Photonenzahl an; somit nimmt die Höhe der Lorentz-Kurve kontinuierlich ab, während die Höhe des zweiten, schmalen Peaks stetig anwächst.

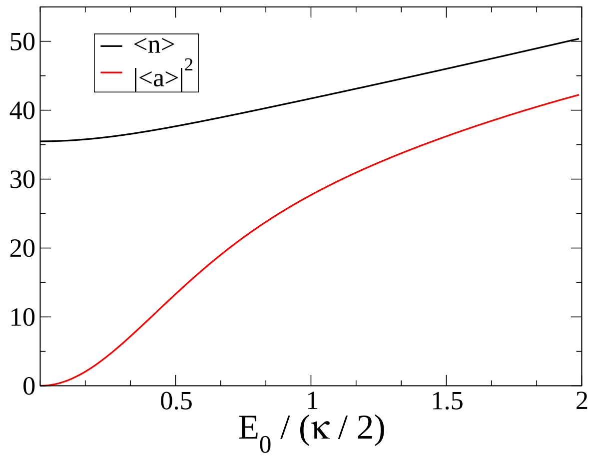


Abbildung 4.9: Mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle$ und Betragsquadrat des Erwartungswerts $\langle a^{(\dagger)} \rangle$ in Abhängigkeit der Amplitude $E_0$ des treibenden Feldes.

### 4.4.2 Numerische Ergebnisse

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass der Erwartungswert des Erzeugungsoperators $\langle a^\dagger \rangle$ einen endlichen Wert erhält, wenn der Oszillator durch ein äußeres Feld angetrieben wird. Dies ist mit dem Auftreten eines Peaks im Emissionsspektrum verknüpft, dessen Höhe proportional zum Quadrat $|\langle \tilde{a} \rangle|^2$ ist. In diesem Abschnitt wird diese kohärente Strahlung im allgemeinen, nicht-resonanten Fall $\omega_{dr} \neq \omega_0 \neq \epsilon$ untersucht. Dabei wird angenommen, dass der Erwartungswert $\langle a^\dagger \rangle$ mit der treibenden Frequenz $\omega_{dr}$ oszilliert; durch numerische Lösung der Master-Gleichung werden die Phase und die Amplitude des Erwartungswerts $\langle \tilde{a}^\dagger \rangle = \langle a^\dagger e^{-i\omega_{dr} t} \rangle$ berechnet.

Falls der Oszillator nicht an das Qubit gekoppelt ist, gelten die einfachen Beziehungen:

$$|\langle \tilde{a}^\dagger \rangle| = E_0 / \sqrt{\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 + (\omega_{dr} - \omega_0)^2} \tag{4.41}$$

$$\tan \phi = (\omega_{dr} - \omega_0) / \frac{\kappa}{2} \tag{4.42}$$

für die Amplitude und die Phase des (komplexen) Erwartungswerts $\langle \tilde{a}^\dagger \rangle$. Die globale Phase wurde dabei so gewählt, dass die Phase $\Phi$ in Resonanz $\omega_{dr} = \omega_0$ den Wert 0 besitzt. Wie im Folgenden gezeigt wird, besteht die Wirkung des Single-Qubit-Lasers in einer Änderung der Amplitude und der Phase der Größe $\langle \tilde{a}^\dagger \rangle$, und somit der kohärenten Strahlung, gegenüber dem ungekoppelten Fall $g = 0$.

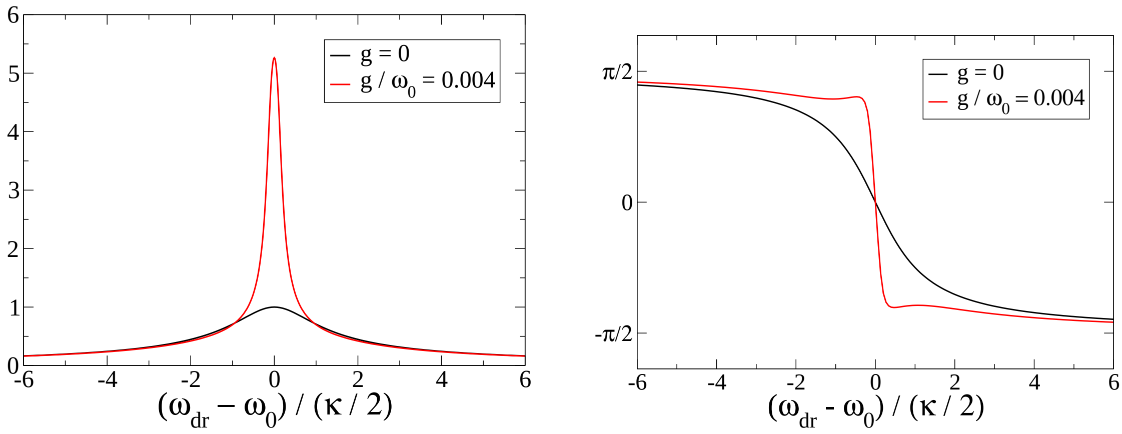


Abbildung 4.10: Amplitude und Phase des Erwartungswerts $\langle \tilde{a}^\dagger \rangle$ in Abhängigkeit der Verstimmung $\omega_{dr} - \omega_0$ des externen Feldes. Die treibende Amplitude $E_0$ hat den Wert $E_0 = \kappa/2$.

Abbildung 4.10 zeigt die Amplitude und die Phase des Erwartungswerts $\langle \tilde{a}^\dagger \rangle$ in Abhängigkeit der Verstimmung $\omega_{dr} - \omega_0$ des treibenden Feldes gegenüber dem Oszillator bei konstanter Amplitude $E_0$. Zum Vergleich ist auch das Ergebnis eingezeichnet, das sich ohne Kopplung an das Qubit ($g = 0$) ergibt.

Der Einfluss des Qubits ist in beiden Bildern klar erkennbar: In einem schmalen Bereich um die Resonanzfrequenz des Oszillators herum wird das externe Signal deutlich verstärkt. In Resonanz $\omega_{dr} = \omega_0$ wird die Amplitude um einen Faktor $\approx 5$ vergrößert; für den kohärenten Beitrag im Emissionsspektrum, dessen Höhe proportional zum Quadrat $|\langle a^\dagger \rangle|$ ist, entspricht das einer Verstärkung um einen Faktor $\approx 25$.

Die Erhöhung der Amplitude wird von einer Verschiebung der Phase begleitet. Die Verschiebung ist dabei in den Bereichen ausgeprägt, in denen auch die Verstärkung der Amplitude groß ist. Wie aus Gleichungen 4.41 und 4.42 entnommen werden kann, entspricht dieses Verhalten einer Verringerung der effektiven Dämpfungsrate des Oszillators.

In Abbildung 4.11 sind die Amplitude und die Phase des Erwartungswerts $\langle \tilde{a}^\dagger \rangle$ in Abhängigkeit der Frequenz des externen Feldes gezeigt. Im Gegensatz zum vorherigen Fall befinden sich jedoch das Qubit und der Oszillator nicht in Resonanz. Die Verstimmung zwischen Qubit und Oszillator äußert sich in einer Verschiebung des Maximums der Amplitude $|\langle a^\dagger \rangle|$. Die maximale Verstärkung des externen Signals

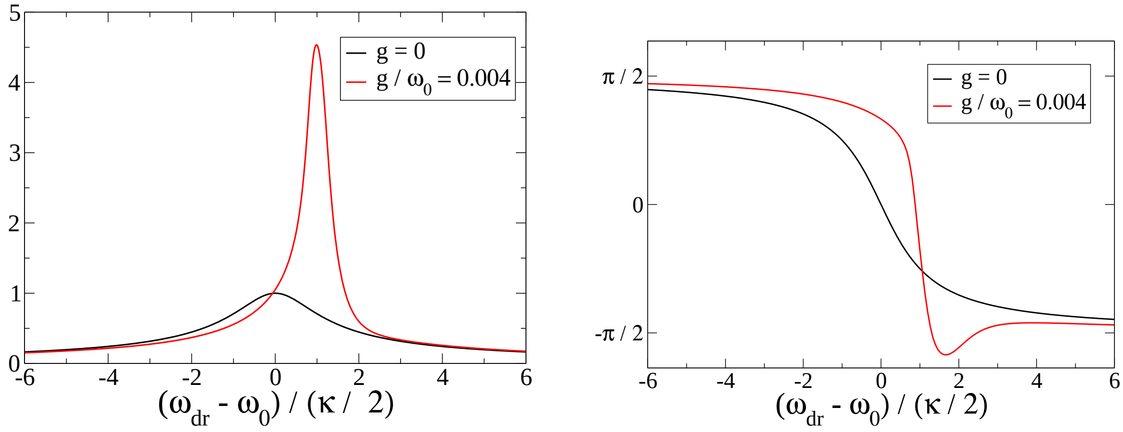


Abbildung 4.11: Amplitude und Phase des Erwartungswerts $\langle \tilde{a}^\dagger \rangle$ in Abhängigkeit der Frequenz des externen Feldes. Die Verstimmung $\Delta = \epsilon - \omega_0$ zwischen dem Qubit und dem Oszillator besitzt den Wert $\Delta/\omega_0 = 0,02$; die treibende Amplitude $E_0$ hat den Wert $E_0 = \kappa/2$.

findet nun statt, wenn die Frequenz $\omega_{dr}$ des treibenden Feldes etwas höher ist als die Resonanzfrequenz $\omega_0$ des Oszillators (dies ist bedingt durch die positive Verstimmung zwischen Qubit und Oszillator; für negative Verstimmung ist das Maximum zu kleineren Frequenzen $\omega_{dr}$ hin verschoben). Im Bereich $\omega_{dr} \approx \omega_0$ wird das externe Signal hingegen unterdrückt. Die Erhöhung der Amplitude $|\langle a^\dagger \rangle|$ wird auch hier von einer Verschiebung der Phase begleitet.

Abbildung 4.12 zeigt schließlich die Amplitude des Erwartungswerts $\langle a^\dagger \rangle$ in Abhängigkeit der Frequenz des externen Feldes und der Verstimmung zwischen Qubit und Oszillator. Dabei ist zu sehen, dass Frequenz $\omega_{dr}$, bei der die Amplitude der kohärenten Strahlung ihr Maximum erreicht, in einem weiten Bereich linear von der Verstimmung $\Delta$ abhängt und einen konstanten Wert besitzt. Für große Werte der Verstimmung sinkt die Amplitude $\langle a^\dagger \rangle$ rasch ab; das System befindet sich dann aufgrund der kleinen effektiven Kopplung zwischen Qubit und Oszillator nicht mehr in einem laserartigen Zustand.

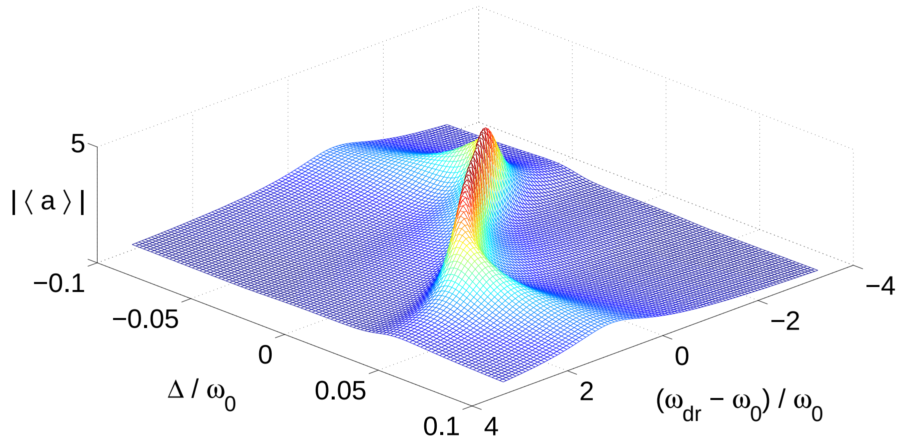


Abbildung 4.12: Amplitude des Erwartungswerts $\langle \tilde{a}^\dagger \rangle$ in Abhängigkeit der Frequenz des externen Feldes und der Verstimmung $\Delta = \epsilon - \omega_0$ zwischen dem Qubit und dem Oszillator. Die Amplitude $E_0$ des treibenden Feldes hat den Wert $E_0 = \kappa/2$.

# Kapitel 5

# Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit wurden gekoppelte Qubit-Oszillator-Systeme mit Hinblick auf laserartiges Verhalten untersucht. Zur Beschreibung dieser Systeme unter Berücksichtigung von Dissipation, die in Single-Qubit-Lasern eine wichtige Rolle spielt, wurden zwei Herangehensweisen benutzt. Der erste Zugang verwendet die Dichtematrix, der zweite Zugang die Bewegungsgleichungen für die Operatoren des Qubits und des Oszillators.

Es wurde eine Methode präsentiert, die die numerische Berechnung der reduzierten Dichtematrix des Qubit-Oszillators Systems im stationären Limit $t \to \infty$ erlaubt. Dieses Verfahren benötigt als Näherung eine Beschränkung des Hilbertraums des Oszillators auf endliche Dimensionen. Die Methode wurde auf das konkrete Beispiel eines getriebenen Fluss-Qubits angewandt, das einen langsamen Oszillator durch seine Rabi-Oszillationen antreibt. Es wurde gezeigt, dass in diesem System laserartiges Verhalten möglich ist, und die mittlere Photonenzahl im Oszillator sowie die zugehörige Photonen-Verteilungsfunktionen berechnet. Als Folge einer Frequenzverschiebung unterscheiden sich letztere von der Poisson-Verteilung üblicher Laser-Zustände.

Es wurde gezeigt, dass das Verhalten des Systems wesentlich von der Relaxationsrate des Fluss-Qubits abhängt. Die mittlere Photonenzahl besitzt eine nichtmonotone Abhängigkeit von der Relaxationsrate. Durch einen Vergleich der mittleren Photonenzahl mit dem Saturationsparameter lassen sich zwei Parameterbereiche unterscheiden: für kleine Relaxationsraten ist die Verteilungsfunktion der Photonen laserartig und weist ein ausgeprägtes Maximum bei einer Photonenzahl auf, die deutlich oberhalb der thermischen Photonenzahl liegt. Für große Relaxationsraten hingegen ist die Photonen-Verteilung thermischer Natur, mit einer erhöhten effektiven Temperatur. Die zwei Bereiche unterscheiden sich sehr deutlich in der Form der Verteilungsfunktionen, während aber die mittlere Photonenzahl in der selben Größenordnung liegt.

Als zweite Methode zur Behandlung von Single-Qubit-Lasern wurden Heisenberg-Langevin-Gleichungen für die Operatoren des Qubits und des Oszillators vorgestellt, die den Einfluss der Umgebung durch Dämpfungs- und Fluktuationsterme berücksichtigen. Dieses Verfahren eignet sich zur Untersuchung von Korrelationsfunktionen. Es wurden Gleichungen für die mittlere Photonenzahl und die mittlere Inversion des Qubits hergleleitet und gezeigt, dass die Faktorisierung des Erwartungswert für das Produkts aus Photonenzahl und Inversion im Bereich starker Kopplung zu ungenauen Ergebnissen führt.

Das Spektrum des Single-Qubit-Lasers ist durch die Phasendiffusionsrate und die Frequenzverschiebung bestimmt. Es wurde eine Herleitung dieser Größen präsentiert, die ohne die eben genannte Faktorisierung auskommt. Dies führte zu analytische Ausdrücken, die neben den Parametern des Systems nur die Erwartungswerte der Photonenzahl und der Inversion beinhalten (wobei die eine Größe aus der anderen berechnet werden kann). Mithilfe dieser Ausdrücke wurde die Abhängigkeit der Phasendiffusionsrate und der Frequenzverschiebung von der Kopplungsstärke zwischen dem Qubit und dem Oszillator untersucht.

Zusätzlich wurde das Verhalten des Single-Qubit-Lasers unter dem Einfluss eines externen kohärenten Felds untersucht, das den Oszillator antreibt. Zunächst wurde der Spezialfall, dass Qubit, Oszillator und treibendes Feld in Resonanz sind, analytisch behandelt. Es wurde gezeigt, dass die Anwesenheit des externen Felds zu einem kohärenten Signal im Emissionsspektrum des Oszillators führt; dieses Signal wird als Folge des laserartigen Verhalten verstärkt. Danach wurde der allgemeine, nicht-resonante Fall numerisch, mithilfe des Dichtematrix-Ansatzes, behandelt. Dabei wurden insbesondere die Amplitude und die Phase der kohärenten Strahlung des Oszillators in Abhängigkeit der treibenden Frequenz untersucht.

## 5.1 Ausblick

Wie in dieser Diplomarbeit gezeigt wurde, spielt Dissipation in Single-Qubits-Lasern eine wichtige Rolle. Um den Einfluss der Umgebung auf das Qubit-Oszillator-System im Rahmen der oben erwähnten Methoden zu untersuchen, werden einige Annahmen an das Reservoir gemacht (das die Umgebung modelliert). Eine dieser Annahmen setzt voraus, dass die Korrelationszeit der Fluktuationen des Reservoirs viel kleiner als die typische Zeitskala ist, auf der sich der Zustand des Systems entwickelt.

Dies schließt die Behandlung von niederfrequentem Rauschen, insbesondere $1/f$-Rauschen aus. Da andererseits festkörperbasierte Qubits anfällig für diese Art von Rauschen sind, könnte die Einbeziehung von $1/f$-Rauschen in die Behandlung von Single-Qubit-Lasern wichtige Aufschlüsse über das Verhalten dieser Systeme geben.

# Anhang A

# Diffusionskoeffizienten für das Qubit

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie die Diffusionskoeffizienten $D_{ij}$ berechnet werden können, die in den Korrelationsfunktionen $\langle F_i(t)F_j(t')\rangle = D_{ij}\, g_{ij}(t-t')$ für die Langevin-Operatoren des Qubits auftreten. Die Herleitung orientiert sich dabei an der Behandlung in Quelle [31]

Den Ausgangspunkt bilden die Heisenberg-Langevin-Gleichungen für die Operatoren $\sigma_z$ und $\sigma_\pm$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma_z &= -\Gamma_1\left(\sigma_z - D_0\right) + F_z(t), && \text{(A.1)}\\
\frac{d}{dt}\sigma_\pm &= -\Gamma_\varphi\sigma_\pm + F_\pm(t), && \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

die den Einfluss des Reservoirs auf das Qubit beschreiben. Diese Gleichungen können auch in der Form $\frac{d}{dt}\sigma_i(t) = \mathcal{D}(\sigma_i(t)) + F_i(t)$ geschrieben werden, wobei die Driftterme $\mathcal{D}(\sigma_i(t))$ Funktionen der Operatoren $\sigma_z(t)$ und $\sigma_\pm(t)$ sind.

Zur Berechnung des Diffusionskoeffizienten $D_{ij}$ wird der Qubit-Operator $\sigma_i(t)\sigma_j(t)$ betrachtet. Unter Verwendung der obigen Gleichungen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\sigma_i(t)\sigma_j(t)\rangle &= \langle\dot\sigma_i(t)\sigma_j(t)\rangle + \langle\sigma_i(t)\dot\sigma_j(t)\rangle\\
&= \langle\mathcal{D}(\sigma_i(t))\sigma_j(t)\rangle + \langle\sigma_i(t)\mathcal{D}\left(\sigma_j(t)\right)\rangle\\
&+ \langle F_i(t)\sigma_j(t) + \sigma_i(t)F_j(t)\rangle. && \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

Zur Auswertung des Ausdrucks in der letzten Zeile wird die Heisenberg-Langevin-Gleichung für den Operator $\sigma_j(t)$ zwischen den Zeitpunkten $t-\Delta t$ und $t$ integriert.

Falls die Zeitdifferenz $\Delta t$ klein ist im Vergleich zu den Dekohärenzzeiten $\frac{1}{\Gamma_1}$ und $\frac{1}{\Gamma_\varphi}$, lässt sich dabei die Näherung

$$\sigma_j(t) = \sigma_j(t-\Delta t) + \Delta t \cdot \mathcal{D}(\sigma_j(t-\Delta t)) + \int_{t-\Delta t}^{t} F_j(t')\,dt' \tag{A.4}$$

machen. Dieser Ausdruck kann in die letzte Zeile der Gleichung A.3 eingesetzt werden. Wenn die Zeitdifferenz $\Delta t$ deutlich größer ist als die Korrelationszeiten der Langevin-Operatoren, also insgesamt die Beziehung $\tau_c \ll \Delta t \ll T_R$ gilt (was aufgrund der Annahmen an das Reservoir immer möglich ist), bleibt dann nur der Term $\sim \langle F_i(t)F_j(t')\rangle$ übrig.

Letzteres liegt daran, dass die Operatoren $\sigma_k(t-\Delta t)$ nur von der Langevin-Operatoren $F_k(t'')$ in der Vergangenheit, d.h. zu Zeiten $t'' < t-\Delta t$ abhängen. Folglich sind die Operatoren $\sigma_k(t-\Delta t)$ und $F_j(t)$ unkorreliert, $\langle\sigma_k(t-\Delta t)F_j(t)\rangle = 0$. Somit ergibt sich für die letzte Zeile der Gleichung A.3:

$$\begin{aligned} & \langle F_i(t)\sigma_j(t) + \sigma_i(t)F_j(t)\rangle \\ = & \int_{t-\Delta t}^{t} dt'\,\langle F_i(t)F_j(t') + F_i(t')F_j(t)\rangle \\ = & D_{ij}\int_{t-\Delta t}^{t} dt'\,\left(g_{ij}(t-t') + g_{ij}(t'-t)\right) \\ = & D_{ij}\int_{-\Delta t}^{\Delta t} d\tau\, g_{ij}(\tau) = D_{ij} \end{aligned} \tag{A.5}$$

Mithilfe dieser Beziehung lässt sich Gleichung A.3 als

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma_i(t)\sigma_j(t)\rangle = \langle\mathcal{D}(\sigma_i(t))\sigma_j(t)\rangle + \langle\sigma_i(t)\mathcal{D}(\sigma_j(t))\rangle + D_{ij} \tag{A.6}$$

schreiben. Andererseits ist die Zeitentwicklung für den Erwartungswert $\langle\sigma_i(t)\sigma_j(t)\rangle$ durch den Driftterm $\mathcal{D}(\sigma_i(t)\sigma_j(t))$ bestimmt, $\frac{d}{dt}\langle\sigma_i(t)\sigma_j(t)\rangle = \langle\mathcal{D}(\sigma_i(t)\sigma_j(t))\rangle$, so dass sich folgende Gleichung für den Diffusionskoeffizienten $D_{ij}$ angeben lässt:

$$D_{ij} = \langle\mathcal{D}(\sigma_i\sigma_j) - \mathcal{D}(\sigma_i)\sigma_j - \sigma_i\mathcal{D}(\sigma_j)\rangle \tag{A.7}$$

Als Beispiel wird der Diffusionskoeffizient $D_{+z}$ berechnet:

$$\begin{aligned} D_{+z} &= \langle\mathcal{D}(\sigma_+\sigma_z) - \mathcal{D}(\sigma_+)\sigma_z - \sigma_+\mathcal{D}(\sigma_z)\rangle = \langle\mathcal{D}(-\sigma_+) - \mathcal{D}(\sigma_+)\sigma_z - \sigma_+\mathcal{D}(\sigma_z)\rangle \\ &= \langle\Gamma_\varphi\sigma_+ + \Gamma_\varphi\sigma_+\sigma_z + \sigma_+\Gamma_1(\sigma_z - D_0) = \langle\Gamma_\varphi\sigma_+ - \Gamma_\varphi\sigma_+ - \sigma_+\Gamma_1(1+D_0) \\ &= -2\Gamma_\uparrow\langle\sigma_+\rangle. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Analog lassen sich auch die übrigen Diffusionskoeffizienten herleiten; dies führt zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
D_{+-} &= \Gamma_{\uparrow} + \Gamma_{\varphi}^{*}(1 + \langle\sigma_z\rangle) \\
D_{-+} &= \Gamma_{\downarrow} + \Gamma_{\varphi}^{*}(1 - \langle\sigma_z\rangle) \\
D_{++} &= D_{--} = 0 \\
D_{z+} &= 2\Gamma_{\downarrow}\langle\sigma_+\rangle \\
D_{+z} &= -2\Gamma_{\uparrow}\langle\sigma_+\rangle \\
D_{z-} &= -2\Gamma_{\uparrow}\langle\sigma_-\rangle \\
D_{-z} &= 2\Gamma_{\downarrow}\langle\sigma_-\rangle \\
D_{zz} &= 2\Gamma_1 - 2(\Gamma_{\uparrow} - \Gamma_{\downarrow})\langle\sigma_z\rangle
\end{aligned} \tag{A.9}$$

# Anhang B

# Diffusionsrate im getrieben Fall

In diesem Abschnitt wird die Näherungsformel $\bar{\kappa}_d \approx \frac{1}{2}\left(\kappa_d + \sqrt{\kappa_d^2 + 2|E_0|^2/\langle n\rangle}\right)$ hergeleitet, die in Kapitel 4.4.1 zur Abschätzung der Amplitude des Erwartungswerts $\langle\tilde{a}^\dagger\rangle$ mithilfe der Gleichung $\langle\tilde{a}^\dagger\rangle = \frac{iE_0}{\bar{\kappa}_d}$ angegeben wird.

Den Ausgangspunkt bilden die Heisenberg-Langevin-Gleichungen für die Operatoren $\sigma_+$, $a$ und $n$ in Resonanz $\omega_{dr} = \omega_0 = \epsilon$:

$$\frac{d}{dt}\sigma_+ = -\left(\Gamma_\varphi - i\omega_0\right)\sigma_+ - ig\sigma_z a^\dagger + F_+(t) \tag{B.1}$$

$$\frac{d}{dt}a = -\left(\frac{\kappa}{2} - i\omega_0\right)a - ig\sigma_- - iE_0^* e^{-i\omega_0 t} + F_a(t) \tag{B.2}$$

$$\frac{d}{dt}n = ig\left(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger\right) + \left(iaE_0 e^{i\omega_0 t} + c.c\right) - \kappa\left(n - N_{th}\right) + F_N(t) \tag{B.3}$$

Aus den Gleichungen B.1 und B.2 lässt sich folgende Gleichung den Operator $\sigma_+ a$ herleiten:

$$\frac{d}{dt}\sigma_+ a = -\Gamma_\varphi\sigma_+ a - ig\sigma_z n - ig\sigma_+\sigma_- - i\sigma_+ E_0^* e^{-i\omega_0 t} + F_{+a}(t) \tag{B.4}$$

wobei die Relation $\frac{\kappa}{2} \ll \Gamma_\varphi$ benutzt wurde. Die Bildung des Erwartungswerts und die Vernachlässigung des letzten Terms führen dann zu der Beziehung:

$$\langle\sigma_+ a\rangle = \frac{-ig}{\Gamma_\varphi}\left(\langle\sigma_z n\rangle + \frac{1}{2}\langle\sigma_z\rangle + \frac{1}{2}\right) - \frac{iE_0^*}{\Gamma_\varphi}\langle\tilde{\sigma}_+\rangle \tag{B.5}$$

Dieser Ausdruck kann in die Gleichung für die mittlere Photonenzahl $\langle n\rangle$ eingesetzt werden, die sich aus der Heisenberg-Langevin-Gleichung B.3 ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle n\rangle &= \frac{2g^2}{\Gamma_\varphi}\left(\langle\sigma_z n\rangle+\frac{1}{2}\langle\sigma_z\rangle+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{gE_0^*}{\Gamma_\varphi}\langle\tilde{\sigma}_+\rangle+c.c.\right)\\&\quad+(i\langle\tilde{a}\rangle E_0+c.c)-\kappa\left(\langle n\rangle-N_{th}\right)\end{aligned}\tag{B.6}$$

In Abschnitt 4.4.1 wurde gezeigt, dass die Näherung $\langle\sigma_z\tilde{a}^\dagger\rangle\approx\frac{1}{2}\left(\langle\sigma_z\rangle+\frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}\right)\langle\tilde{a}^\dagger\rangle$, die Korrelationen zwischen der Amplitude und der Phase vernachlässigt, zu den Gleichungen $\bar{\kappa}_d=\frac{\kappa}{2}-\frac{g^2}{2\Gamma_\varphi}\left(\langle\sigma_z\rangle+\frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}\right)$, $\langle\tilde{a}^\dagger\rangle=\frac{iE_0}{\bar{\kappa}_d}$ und $\langle\tilde{\sigma}_+\rangle=\frac{-ig}{2\Gamma_\varphi}\left(\langle\sigma_z\rangle+\frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}\right)\langle\tilde{a}^\dagger\rangle=\frac{gE_0}{2\Gamma_\varphi\bar{\kappa}_d}\left(\langle\sigma_z\rangle+\frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}\right)$ führt. Das Einsetzen dieser Ausdrücke für die Erwartungswerte $\langle\tilde{a}\rangle$ und $\langle\tilde{\sigma}_+\rangle$ in die obige Gleichung liefert die Gleichung:

$$\langle n\rangle=N_{th}+\frac{2|E_0|^2}{\bar{\kappa}_d\kappa}+\frac{2g^2}{\Gamma_\varphi\kappa}\left(\langle\sigma_z n\rangle+\frac{1}{2}\langle\sigma_z\rangle+\frac{1}{2}\right)+\frac{g^2}{\Gamma_\varphi^2}\frac{|E_0|^2}{\bar{\kappa}_d\kappa}\left(\langle\sigma_z\rangle+\frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}\right).\tag{B.7}$$

Zur Berechnung der Rate $\bar{\kappa}_d$ wird der Erwartungswert $\langle\sigma_z n\rangle$ benötigt. Aus der Gleichung für die mittlere Photonenzahl lässt sich folgende Relation ableiten:

$$\begin{aligned}&\frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}\left(1+\frac{|E_0|^2}{\Gamma_\varphi\bar{\kappa}_d}\frac{1}{2\langle n\rangle}\right)\\&=\frac{\Gamma_\varphi\kappa}{2g^2}\left(1-\frac{N_{th}}{\langle n\rangle}\right)-\frac{\Gamma_\varphi}{\bar{\kappa}_d g^2}\frac{|E_0|^2}{\langle n\rangle}-\frac{\langle\sigma_z\rangle+1}{2\langle n\rangle}-\frac{\langle\sigma_z\rangle}{\Gamma_\varphi\bar{\kappa}_d}\frac{|E_0|^2}{\langle n\rangle}.\end{aligned}\tag{B.8}$$

Für die mittlere Photonenzahl gilt die Beziehung $\langle n\rangle\geq\frac{2|E_0|^2}{\bar{\kappa}_d\kappa}$; damit lässt sich die Abschätzung $\frac{|E_0|^2}{\Gamma_\varphi\bar{\kappa}_d}\frac{1}{\langle n\rangle}<\frac{\kappa}{2\Gamma_\varphi}\ll 1$ vornehmen, so dass sich die Näherung

$$\frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}\approx\frac{\Gamma_\varphi\kappa}{2g^2}\left(1-\frac{N_{th}}{\langle n\rangle}\right)-\frac{\Gamma_\varphi}{\bar{\kappa}_d g^2}\frac{|E_0|^2}{\langle n\rangle}-\frac{\langle\sigma_z\rangle+1}{2\langle n\rangle}\tag{B.9}$$

machen lässt.

Mithilfe dieses Ausdrucks wird die Rate $\bar{\kappa}_d$ berechnet:

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_d &= \frac{\kappa}{2}-\frac{g^2}{2\Gamma_\varphi}\left(\frac{\langle\sigma_z n\rangle}{\langle n\rangle}+\langle\sigma_z\rangle\right)\\&=\frac{\kappa}{4}+\frac{\kappa}{4}\frac{N_{th}}{\langle n\rangle}-\frac{g^2}{2\Gamma_\varphi}\langle\sigma_z\rangle+\frac{g^2}{\Gamma_\varphi}\frac{\langle\sigma_z\rangle+1}{4\langle n\rangle}+\frac{|E_0|^2}{\bar{\kappa}_d}\frac{1}{2\langle n\rangle}\\&=\kappa_d+\frac{|E_0|^2}{\bar{\kappa}_d}\frac{1}{2\langle n\rangle},\end{aligned}\tag{B.10}$$

wobei die Größe $\kappa_d$ durch die Gleichung $\kappa_d=\frac{\kappa}{4}+\frac{\kappa}{4}\frac{N_{th}}{\langle n\rangle}-\frac{g^2}{2\Gamma_\varphi}\langle\sigma_z\rangle+\frac{g^2}{\Gamma_\varphi}\frac{\langle\sigma_z\rangle+1}{4\langle n\rangle}$ definiert ist. Für die Rate $\bar{\kappa}_d$ ergibt sich somit die quadratische Gleichung

$$\bar{\kappa}_d^2-\kappa_d\bar{\kappa}_d-\frac{|E_0|^2}{2\langle n\rangle}=0.\tag{B.11}$$

Diese Gleichung besitzt genau eine positive Lösung:

$$\bar{\kappa}_d = \frac{1}{2}\left(\kappa_d + \sqrt{\kappa_d^2 + \frac{2|E_0|^2}{\langle n\rangle}}\right) = 0. \tag{B.12}$$

# Literaturverzeichnis


[1] J. Clarke, F. K. Wilhelm, Superconducting quantum bits, *Nature* **453**, 1031 (2008)

[2] R. F. Voss, R. A. Webb, Macroscopic quantum tunneling in 1-$\mu$m Nb Josephson junctions, *Phys. Rev. Lett* **47**, 265 (1981)

[3] M. H. Devoret, J. M. Martinis, J. Clarke, Measurements of macroscopic quantum tunneling out of the zero-voltage state of a current-biased Josephson junction, *Phys. Rev. Lett* **55**, 1908 (1985)

[4] J. M. Martinis, M. H. Devoret, J. Clarke, Energy-level quantization in the zero-voltage state of a current-biased Josephson junction, *Phys. Rev. Lett* **55**, 1543 (1985)

[5] Y. Nakamura, C. D. Chen, J. S. Tsai, Spectroscopy of energy-level splitting between two macroscopic quantum states of charge coherently superposed by Josephson coupling, *Phys. Rev. Lett* **79**, 2328 (1997)

[6] J. R. Friedman *et al.*, Quantum superpositions of distinct macroscopic states, *Nature* **406**, 43 (2000)

[7] C. H. van der Wal *et al.*, Quantum superpositions of macroscopic persistent current, *Science* **290** 773 (2000)

[8] Yu. Makhlin, G. Schön, A. Shnirman, Quantum-state engineering with Josephson-junction devices, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 357 (2001)

[9] M. A. Nielsen, I.L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, *Cambridge University Press* (2000)

[10] D. P. DiVincenzo, The Physical Implementation of Quantum computation, *Fortschr. Phys.* **48**, 9-11, 771-783 (2000)

[11] Quantum Information Science and Technology Roadmapping Project (University of California), *http://qist.lanl.gov/*

[12] D. Esteve, D. Vion, Solid state quantum bit circuits, *Les Houches Summer School-Session LXXXI on Nanoscopic Quantum Physics* (2004)

[13] Yu. Makhlin, G. Schön, A. Shnirman, Dissipation in Josephson qubits, *New Directions in Mesoscopic Physics (towards Nanoscience)*, eds. R. Fazio et al., Kluwer (2003), Seiten 197-224

[14] A. Wallraff *et al.*, Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics, *Nature* **431**, 162 (2004).

[15] I. Chiorescu *et al.*, Coherent dynamics of a flux qubit coupled to a harmonic oscillator, *Nature* **431**, 159 (2004)

[16] J. Johansson *et al.*, Vacuum Rabi oscillations in a macroscopic superconducting qubit LC oscillator system, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 127006 (2006)

[17] A. Naik *et al.*, Cooling a nanomechanical resonator with quantum back-action, *Nature* **443**, 193 (2006)

[18] D. I. Schuster *et al.*, Resolving photon number states in a superconducting circuit, *Nature* **445**, 515 (2007)

[19] M. A. Sillanpää, J. I. Park, R. W. Simmonds, Coherent quantum storage and transfer between two phase qubits via a resonant cavity, *Nature* **449**, 438 (2007)

[20] J. Majer *et al.*, Coupling superconducting qubits via a cavity bus, *Nature* **449**, 443 (2007)

[21] A. A. Houck *et al.*, Generating single microwave photons in a circuit, *Nature* **449**, 328 (2007)

[22] O. Astafiev *et al.*, Single artificial-atom lasing, *Nature* **449**, 588 (2007)

[23] M. Grajcar *et al.*, Sisyphus cooling and amplification by a superconducting qubit, *Nature Physics* **4**, 612 (2008)

[24] E. Il'ichev *et al.*, Continous monitoring of Rabi oscillations in a Josephson flux qubit, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 097906 (2003)

[25] J. Hauss *et al.*, Single-Qubit Lasing and Cooling at the Rabi Frequency, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 037003 (2008)

[26] M. H. Devoret, Quantum fluctuations in electrical circuits, *Session LXIII on Quantum Fluctuations*, 351 (1997)

[27] M. H. Devoret, A. Wallraff, J. M. Martinis, Superconducitng qubits: A short review, arxiv:cond-mat/0411174 (2004)

[28] M. Tinkham, Introduction to Superconductivity, *Dover Publications* (2004)

[29] B. D. Josephson, Possible new effects in superconductive tunneling, *Phys. Lett.* **1**, 251 (1962)

[30] G. Wendin, V. S. Shumeiko, Superconducting Quantum Circuits, Qubits and Computing, arxiv:cond-mat/0508729 (2005)

[31] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, Atom-photon interactions: basic processes and applications, *Wiley Science Paperback Series* (1998)

[32] C. W. Gardiner, P. Zoller, Quantum noise, *Springer* (2004)

[33] J. Hauss *et al.*, Dissipation in circuit quantum electrodynamics: lasing and cooling of a low-frequency oscillator, arxiv:cond-mat/0806.1298 (2008)

[34] M. Reid, K. J. McNeil, D. F. Walls, Unified approach to multiphoton lasers and multiphoton bistability, *Phys. Rev. A* **24**, 2029 (1981)

[35] S. André *et al.*, Phase diffusion and locking in single qubit lasers, arxiv:cond-mat/0807.4607 (2008)

[36] P. Mandel, Fluctuations in laser theories, *Phys. Rev. A* **21**, 2020 (1980)

[37] D. F. Walls, G. J. Milburn, Quantum optics, *Springer* (1994)

## Danksagungen

An erster Stelle möchte ich meiner Betreuerin Valentina Brosco danken, die stets ein offenes Ohr für Fragen hatte und mit ihrer Unterstützung und ihren Ratschlägen wesentlich zum Entstehen dieser Diplomarbeit beigetragen hat.

Ich danke Prof. Gerd Schön für die Möglichkeit, meine Diplomarbeit am TFP auf dem Gebiet der Quanteninformation anzufertigen, und Prof. Alexander Shnirman für die Übernahme des Korreferats.

Für die hilfreichen Tipps im Umgang mit Linux und anderen Dingen danke ich Andreas Poenicke, Michael Marthaler, Janne Viljas und Georgo Metalidis.

Ein Dank geht auch an Christopher Kley, Fabian Niesler und Richard Pfeifer, die sich zum Korrekturlesen bereiterklärt haben.

Schließlich danke ich meinen Eltern für die Unterstützung meines Studiums.

Ich erkläre hiermit, die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und dabei nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Karlsruhe, den 24.09.2008 ____________________________

Stephan André