Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zu Physik der Quanteninformation WS 15/16

Dr. M. Marthaler
C. Karlewski

Lösungsvorschlag zu Blatt 6
Besprechung, 29.01.2016

---

1. Dekohärenz und die Lindblad-Gleichung — 6 Punkte

Die benötigten Matrixelemente zur Berechnung sind

$$\langle 1|\sigma_z|1\rangle = 1; \quad \langle 0|\sigma_z|0\rangle = -1; \quad \langle 1|\sigma_+|0\rangle = 1; \quad \langle 0|\sigma_-|1\rangle = 1 \tag{1}$$

alle anderen Matrixelemente sind Null. Die Mastergleichung für das Matrixelement $\rho_{11}(t)$ ist

$$\begin{aligned}
\dot\rho_{11}(t) =& -i\tfrac{1}{2}\omega_{10}\left[\underbrace{\langle 1|\sigma_z\rho|1\rangle - \langle 1|\rho\sigma_z|1\rangle}_{=0}\right] \\
&+ \tfrac{\gamma_{10}}{2}\left(2\underbrace{\langle 1|\sigma_-\rho\sigma_+|1\rangle}_{=0} - \langle 1|\sigma_+\sigma_-\rho|1\rangle - \langle 1|\rho\sigma_+\sigma_-|1\rangle\right) \\
&+ \tfrac{\gamma_{01}}{2}\left(2\langle 1|\sigma_+\rho\sigma_-|1\rangle - \underbrace{\langle 1|\sigma_-\sigma_+\rho|1\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle 1|\rho\sigma_-\sigma_+|1\rangle}_{=0}\right) \qquad (2)\\
=& \tfrac{\gamma_{10}}{2}\left(-\langle 1|\sigma_+|0\rangle\langle 0|\sigma_-|1\rangle\langle 1|\rho|1\rangle - \langle 1|\rho|1\rangle\langle 1|\sigma_+|0\rangle\langle 0|\sigma_-|1\rangle\right) \\
&+ \gamma_{01}\langle 1|\sigma_+|0\rangle\langle 0|\rho|0\rangle\langle 0|\sigma_-|1\rangle \qquad (3)\\
\dot\rho_{11}(t) =& -\gamma_{10}\rho_{11}(t) + \gamma_{01}\rho_{00}(t) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Die Mastergleichung für das Matrixelement $\rho_{10}(t)$ ist

$$\begin{aligned}
\dot\rho_{10}(t) =& -i\tfrac{1}{2}\omega_{10}\left[\langle 1|\sigma_z|1\rangle\langle 1|\rho|0\rangle - \langle 1|\rho|0\rangle\langle 0|\sigma_z|0\rangle\right] \\
&+ \tfrac{\gamma_{10}}{2}\left(2\underbrace{\langle 1|\sigma_-\rho\sigma_+|0\rangle}_{=0} - \langle 1|\sigma_+|0\rangle\langle 0|\sigma_-|1\rangle\langle 1|\rho|0\rangle - \underbrace{\langle 1|\rho\sigma_+\sigma_-|0\rangle}_{=0}\right) \\
&+ \tfrac{\gamma_{01}}{2}\left(2\underbrace{\langle 1|\sigma_+\rho\sigma_-|0\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle 1|\sigma_-\sigma_+\rho|0\rangle}_{=0} - \langle 1|\rho|0\rangle\langle 0|\sigma_-|1\rangle\langle 1|\sigma_+|0\rangle\right) \qquad (5)\\
\dot\rho_{10}(t) =& -i\omega_{10}\rho_{10}(t) - \tfrac{1}{2}\rho_{10}(t)(\gamma_{10}+\gamma_{01}) \qquad (6)
\end{aligned}$$

2. Der 'echte' Flux-Qubit — 14 Punkte

a)(4 Punkte) Wie in Aufgabenblatt 4 müssen die Ströme mit Hilfe der Kirchhoff'schen Regeln gleichgesetzt werden

$$I_{K1} + I_{J1} = I_{K2} + I_{J2} = I_{K3} + I_{J3}, \tag{7}$$

$$\frac{\hbar}{2e}C\ddot\phi_1 + I_C\sin(\phi_1) = \frac{\hbar}{2e}C\ddot\phi_2 + I_C\sin(\phi_2) = \frac{\hbar}{2e}C'\ddot\phi_3 + I_{C'}\sin(\phi_3). \tag{8}$$

Durch einsetzen der Phasenbedingung $\phi_1+\phi_2+\phi_3 = \phi_E$ ergibt sich

$$\frac{\hbar}{2e}C\ddot\phi_{1/2} + I_C\sin(\phi_{1/2}) = -\frac{\hbar}{2e}C'\left(\ddot\phi_1+\ddot\phi_2\right) + I_{C'}\sin\left(\phi_E-\phi_1-\phi_2\right) \tag{9}$$

Mit Hilfe des Additionstheorems $\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ können die Glei-

chungen weiter umgeschrieben werden, was nützlich bei Aufgabenteil c) sein wird

$$\frac{\hbar}{e}\left(C+2C'\right)\frac{\ddot{\phi}_1+\ddot{\phi}_2}{2}+2I_C\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)-2I_{C'}\sin\left(\phi_E-2\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)=0 \tag{10}$$

$$\frac{\hbar}{e}C\frac{\ddot{\phi}_1-\ddot{\phi}_2}{2}+2I_C\sin\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)=0. \tag{11}$$

b)(4 Punkte) Der Strom durch den inneren Ring lässt sich analog schreiben als

$$I_{\mathrm{In}}=\frac{\hbar}{2e}C''\left(\ddot{\phi}_3-\ddot{\phi}_4\right)+I_{C''}\left(\sin(\phi_3)-\sin(\phi_4)\right), \tag{12}$$

mit der Randbedingung $\phi_3+\phi_4=\phi_e$. Mit der Definition

$$\phi_{a/b}=\frac{\phi_3\pm\phi_4}{2},\ \text{daher}\ 2\phi_a=\phi_e, \tag{13}$$

folgt

$$I_{\mathrm{In}}=\frac{\hbar}{2e}C''2\ddot{\phi}_b+I_{C''}2\cos\left(\frac{\phi_e}{2}\right)\sin(\phi_b), \tag{14}$$

wobei das Additionstheorem

$$\sin(\phi_3)-\sin(\phi_4)=2\cos\left(\frac{\phi_3+\phi_4}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi_3-\phi_4}{2}\right) \tag{15}$$

benutzt wurde. Dadurch lassen sich die neuen Parameter einfach ablesen $C^{'}=2C^{''}$ und $I_{C'}=2I_C^{''}\cos\left(\frac{\phi_e}{2}\right)$. Man erhält also einen Qubit mit einstellbarem kapazitivem Strom über den externen Fluss.

c)(4 Punkte) Mit den Definitionen

$$\phi_\pm=\frac{\phi_1\pm\phi_2}{2},\ \frac{1}{E_+}=\frac{1}{E_C}+\frac{2}{E_{C'}},\ E_{J'}=\alpha E_J\ \text{mit}\ 0<\alpha<1, \tag{16}$$

(Achtung: Faktor 2 in der Definition von E_+ anders als auf dem Aufgabenblatt) lässt sich die Lösung aus Aufgabenteil a) weiter vereinfachen

$$\frac{\hbar}{e}\left(C+2C'\right)\ddot{\phi}_+ +2I_C\sin\left(\phi_+\right)\cos\left(\phi_-\right)-2I_{C'}\sin\left(\phi_E-2\phi_+\right)=0 \tag{17}$$

$$\frac{\hbar}{e}C\ddot{\phi}_- +2I_C\sin\left(\phi_-\right)\cos\left(\phi_+\right)=0. \tag{18}$$

Vergleich mit Euler-Lagrange und abgleichen der beiden Lagrange-Funktionen für ϕ_+ und ϕ_- ergibt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\vec{\phi},\dot{\vec{\phi}}\right)=&\frac{\hbar}{2E_+}\dot{\phi}_+^2+\frac{\hbar}{2E_C}\dot{\phi}_-^2\\&+2E_J\cos(\phi_+)\cos(\phi_-)+\alpha E_J\cos(\phi_E-2\phi_+)+\text{const.}\end{aligned} \tag{19}$$

c)(2 Punkte) Die Werte für α entsprechen experimentell realistischen Werten. Für größeres α entwickelt sich eine stärkeres Doppelmuldenpotential in ϕ_+ Richtung, während in ϕ_- Richtung eine harmonisches Potential genähert werden kann. Ist dieses sehr Steil, kann der Qubit durch ein 1D Doppelmuldenpotential genähert werden.

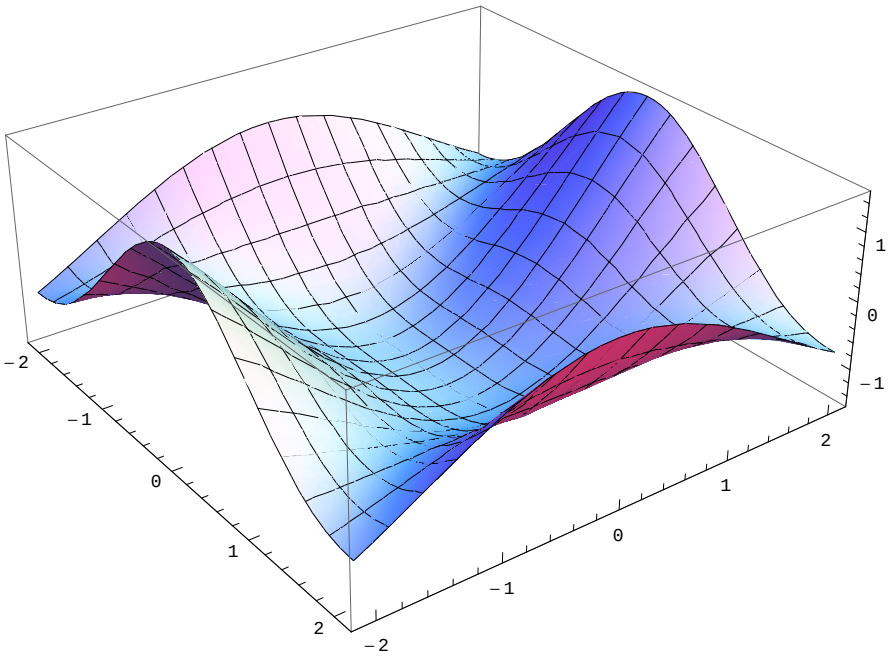

Abbildung 1: Potential für $\alpha = 0.5$.

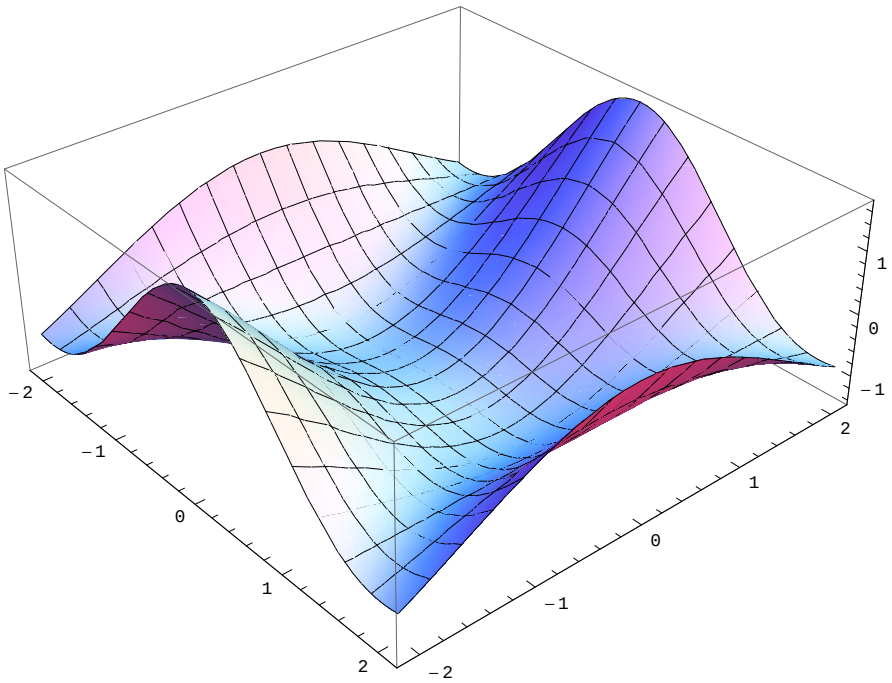

Abbildung 2: Potential für $\alpha = 0.7$.