Übungen zu Physik der Quanteninformation WS 15

Dr. M. Marthaler
C. Karlewski

Lösungsvorschlag zu Blatt 5
Besprechung, 12.01.2016

---

1. Klassisches Modell für Dissipation — 12 Punkte

(a) (3 Pkt.) Die homogene Lösung erfüllt die homogene DGL

$$M_j \ddot{X}_j + M_j \Omega_j^2 X_j = 0 \tag{1}$$

Daher ist die zweite Ableitung von $X_j^{(0)}(t)$ zu berechnen

$$X_j^{(0)}(t) = X_j(t_0)\cos[\Omega_j(t-t_0)] + \frac{\dot{X}_j(t_0)}{\Omega_j}\sin[\Omega_j(t-t_0)] \tag{2}$$

$$\ddot{X}_j^{(0)}(t) = -X_j(t_0)\cos[\Omega_j(t-t_0)]\Omega_j^2 - \frac{\dot{X}_j(t_0)}{\Omega_j}\sin[\Omega_j(t-t_0)]\Omega_j^2 \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Dies erfüllt die obige homogene DGL. Die Ableitungen der speziellen Lösung sind

$$X_j(t) = \frac{c_j}{M_j\Omega_j}\int_{t_0}^t dt' \sin[\Omega_j(t-t')]x(t') \tag{5}$$

$$\dot{X}_j(t) = \frac{c_j}{M_j\Omega_j}\sin(\Omega_j \cdot 0)x(t) + \frac{c_j}{M_j\Omega_j}\int_{t_0}^t dt' \cos[\Omega_j(t-t')]x(t')\Omega_j \tag{6}$$

$$\ddot{X}_j(t) = \frac{c_j}{M_j}\cos(0)x(t) - \frac{c_j}{M_j\Omega_j}\int_{t_0}^t dt' \sin(\Omega_j(t-t'))x(t')\Omega_j^2 \tag{7}$$

Einsetzen in $M_j\ddot{X}_j + M_j\Omega_j^2\left(X_j - \frac{c_j}{M_j\Omega_j^2}x\right) = 0$, erfüllt die Gleichung.

(b) (3 Pkt.) Die partielle Integration der Klammer $\{\ldots\}$ liefert

$$\{x(t) - \Omega_j\int_{t_0}^t dt' \sin(\Omega_j(t-t'))x(t')\} \tag{8}$$

$$= x(t) - \Omega_j\left[\frac{1}{\Omega_j}\cos(\Omega_j(t-t'))x(t')\right]_{t'=t_0}^t + \Omega_j\int_{t_0}^t \frac{1}{\Omega_j}\cos(\Omega_j(t-t'))\dot{x}(t')dt' \tag{9}$$

$$= x(t) - x(t) + \int_{t_0}^t \cos(\Omega_j(t-t'))\dot{x}(t')dt' \tag{10}$$

$$= \int_{t_0}^t \cos(\Omega_j(t-t'))\dot{x}(t')dt' \tag{11}$$

Zusammen mit der Summe ergibt dies

$$\sum_j \frac{c_j^2}{M_j\Omega_j^2}\{\ldots\} = \sum_j \frac{c_j^2}{M_j\Omega_j^2}\int_{t_0}^t \cos(\Omega_j(t-t'))\dot{x}(t')dt' \tag{12}$$

$$= \int_0^\infty d\omega \sum_j \frac{c_j^2}{M_j\Omega_j^2}\delta(\omega-\Omega_j)\int_{t_0}^t \cos(\Omega_j(t-t'))\dot{x}(t')dt' \tag{13}$$

$$= \int_0^\infty d\omega \frac{2}{\pi}\frac{J(\omega)}{\omega}\int_{t_0}^t \cos(\omega(t-t'))\dot{x}(t')dt' \tag{14}$$

(c) (3 Pkt.) $\xi(t)$ ist gegeben als

$$\xi(t) = \sum_j c_j X_j^{(0)}(t) = \sum_j c_j X_j(t_0)\cos[\Omega_j(t-t_0)] + \frac{\dot{X}_j(t_0)}{\Omega_j}\sin[\Omega_j(t-t_0)] \tag{15}$$

Daraus folgt direkt für die Erwartungswerte

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \tag{16}$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \sum_j c_j^2 [\overbrace{\langle X_j^2(t_0) \rangle}^{\frac{kT}{\Omega_j^2 M_j}} \cos(\Omega_j(t-t_0))\cos(\Omega_j(t'-t_0)) \tag{17}$$

$$+ \frac{1}{\Omega_j^2}\underbrace{\langle \dot{X}_j^2(t_0) \rangle}_{\frac{kT}{M_j}} \sin(\Omega_j(t-t_0))\sin(\Omega_j(t'-t_0))] \tag{18}$$

Die auch denkbaren Cross-Terme mit Sinus und Kosinus sowie mit zwei verschiedenen X_j sind Null Aufgrund der Relationen $\langle X_i(t_0) X_j(t_0) \rangle \propto \delta_{ij}$, $\langle X_i(t_0)\dot{X}_j(t_0) \rangle = \ldots = 0$. Das Ergebnis lässt sich weiter vereinfachen zu

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \sum_j \frac{c_j^2}{M_j \Omega_j^2} kT(\cos(\Omega_j(t-t_0))\cos(\Omega_j(t'-t_0)) + \sin(\Omega_j(t-t_0))\sin(\Omega_j(t'-t_0))) \tag{19}$$

$$= \sum_j \frac{c_j^2}{M_j \Omega_j^2} kT \frac{1}{2}\cos(\Omega_j(t-t')) \tag{20}$$

$$= \int_0^\infty \sum_j \frac{c_j^2}{M_j \Omega_j^2} kT \delta(\omega - \Omega_j)\frac{1}{2}\cos(\Omega_j(t-t'))d\omega \tag{21}$$

$$= \int_0^\infty d\omega \frac{2}{\pi}\frac{J(\omega)}{\omega} kT\cos(\omega(t-t')) \tag{22}$$

(d) (3 Pkt.) Aus der Formel vom Aufgabenblatt folgt für $\Gamma(t-t')$

$$\Gamma(t-t') = \frac{1}{m}\int_0^\infty d\omega \frac{2J(\omega)}{\pi\omega}\cos(\omega(t-t'))\Theta(t-t') \tag{23}$$

$$= \frac{\gamma}{\pi}\int_0^\infty d\omega \cos(\omega(t-t'))\Theta(t-t') \tag{24}$$

$$= 2\gamma\Theta(t-t')\delta(t-t') \tag{25}$$

$$= \gamma\delta(t-t'). \tag{26}$$

Mit der Lösung aus Aufgabenteil (c) folgt

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \int_0^\infty d\omega \frac{2}{\pi} m\gamma kT \cos(\omega(t-t')) = 2m\gamma kT\delta(t-t') \tag{27}$$

$$S(\omega) = 2\int dt\, \langle \xi(t)\xi(0) \rangle\, e^{-i\omega t} = 4m\gamma kT \tag{28}$$

3. Gaußverteilung für mehrere Variablen — 5 Punkte

(a) (4 Pkt.) Wir betrachten die charakteristische Funktion

$$\phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) = \langle e^{i\sum_{j=1}^M \lambda_j \varepsilon_j} \rangle \tag{29}$$

Es ergibt sich

$$\phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{M/2}}\int_{-\infty}^\infty d^M\varepsilon e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^M \varepsilon_i A_{ij}\varepsilon_j + i\sum_{j=1}^M \lambda_j \varepsilon_j} \tag{30}$$

Zur Berechnung des Integrals wird der Exponent mittels mehrdimensionaler quadratischer Ergänzung umgeschrieben

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\varepsilon_i A_{ij}\varepsilon_j + i\sum_{j=1}^{M}\lambda_j\varepsilon_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\lambda_i G_{ij}\lambda_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\lambda_i G_{ij}\lambda_j \tag{31}$$

mit

$$G_{ij} = [A^{-1}]_{ij},\ A_{ij} = A_{ji},\ G_{ij} = G_{ji},\ \sum_{j=1}^{M} A_{ij}G_{jk} = \delta_{ik}. \tag{32}$$

Die ersten drei Summanden können zusammengefasst werden zu

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\left(\varepsilon_i - i\sum_k \lambda_k G_{ki}\right) A_{ij}\left(\varepsilon_j - i\sum_k G_{jk}\lambda_k\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M} y_i A_{ij} y_j \tag{33}$$

mit $y_j = \varepsilon_j - i\sum_k G_{jk}\lambda_k$. Daraus folgt schließlich

$$\phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_M) = \underbrace{\frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{M/2}}\int_{-\infty}^{\infty} d^M y e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M} y_i A_{ij} y_j}}_{=1\text{ Normierung }\rho} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\lambda_i G_{ij}\lambda_j} \tag{34}$$

$$\phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_M) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\lambda_i G_{ij}\lambda_j} = \exp\left[-\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\lambda_i[A^{-1}]_{ij}\lambda_j\right] \text{ q.e.d.} \tag{35}$$

(b) (1 Pkt.) Mit Hilfe des Hinweises ergibt sich

$$\langle\varepsilon_i\rangle = \frac{1}{i}\frac{d}{d\lambda_i}\phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_M)\Big|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_M=0} = -\sum_{j=1}^{M} G_{ij}\lambda_j\Big|_{\lambda_j=0} = 0 \tag{36}$$

$$\langle\varepsilon_i\varepsilon_j\rangle = -\frac{d^2}{d\lambda_i d\lambda_j}\phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_M)\Big|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_M=0} \tag{37}$$

$$= \left[G_{ij}\phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_M) - \left(\sum_n G_{in}\lambda_n\right)\left(\sum_n G_{jn}\lambda_n\right)\phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_M)\right]\Big|_{\lambda_1=\ldots\lambda_M=0} \tag{38}$$

$$= G_{ij} \tag{39}$$

$$\langle\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_m\rangle = \frac{d^4}{d\lambda_i d\lambda_j d\lambda_k d\lambda_m}\phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_M)\Big|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_M=0} = G_{ij}G_{km} + G_{ik}G_{jm} + G_{im}G_{jk} \tag{40}$$

4. Atom im Strahlungsfeld **3 Punkte**

(a) (1 Pkt.) Wir beschränken uns zuerst auf eine Mode ein: Wir haben

$$e^{iH_0 t/\hbar} = e^{i\omega t a^\dagger a} e^{i\frac{\omega_0}{2}t\sigma_z} = e^{i\omega t a^\dagger a}\left(\cos\left(\tfrac{\omega_0}{2}t\right) + i\sigma_z \sin\left(\tfrac{\omega_0}{2}t\right)\right) \tag{41}$$

$$e^{-iH_0 t/\hbar} = e^{-i\omega t a^\dagger a} e^{-i\frac{\omega_0}{2}t\sigma_z} = e^{-i\omega t a^\dagger a}\left(\cos\left(\tfrac{\omega_0}{2}t\right) - i\sigma_z \sin\left(\tfrac{\omega_0}{2}t\right)\right). \tag{42}$$

Des weiteren gilt

$$e^{i\omega t a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\omega t a^\dagger a} = a^\dagger e^{i\omega t};\quad e^{i\omega t a^\dagger a} a e^{-i\omega t a^\dagger a} = a e^{-i\omega t} \tag{43}$$

Mit der Verwendung von $\sigma_z\sigma_\pm = \pm\sigma_\pm$ erhalten wir

$$\left(\cos\left(\tfrac{\omega_0}{2}t\right) + i\sigma_z \sin\left(\tfrac{\omega_0}{2}t\right)\right)\sigma_+\left(\cos\left(\tfrac{\omega_0}{2}t\right) - i\sigma_z \sin\left(\tfrac{\omega_0}{2}t\right)\right) = e^{i\omega_0 t}\sigma_+ \tag{44}$$

$$\left(\cos\left(\tfrac{\omega_0}{2}t\right) + i\sigma_z \sin\left(\tfrac{\omega_0}{2}t\right)\right)\sigma_-\left(\cos\left(\tfrac{\omega_0}{2}t\right) - i\sigma_z \sin\left(\tfrac{\omega_0}{2}t\right)\right) = e^{-i\omega_0 t}\sigma_- \tag{45}$$

Damit folgt für eine Mode $H_1(t) = \hbar g(\sigma_+ a e^{i(\omega_0-\omega)t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i(\omega_0-\omega)t})$. Unter Verwendung von $[a_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$ erhalten wir für das volle System mit allen Moden

$$H_1'(t) = \sum_{\vec{k}} \hbar g_{\vec{k}} (\sigma_+ a_{\vec{k}} e^{i(\omega_0-\omega_{\vec{k}})t} + \sigma_- a^\dagger_{\vec{k}} e^{-i(\omega_0-\omega_{\vec{k}})t}) \tag{46}$$

(b) (2 Pkt.) Wir verwenden die Notation $+ = e$ und $- = g$ zur besseren Übersicht. Wir beginnen mit den relevanten Matrixelementen:

$$\frac{1}{\hbar} \left| \int_{t_0}^{t} d\tau \, \langle g, \{n'_{\vec{k}}\} | H_1'(\tau) | e, \{n_{\vec{k}}\} \rangle \right| = \left| \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} \langle g, \{n'_{\vec{k}}\} | \sigma_- a^\dagger_{\vec{k}} | e, \{n_{\vec{k}}\rangle \int_{t_0}^{t} d\tau e^{-i(\omega_0-\omega_{\vec{k}})\tau} \right| \tag{47}$$

$$= \left| \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} \langle g, \{n'_{\vec{k}}\} | \sigma_- a^\dagger_{\vec{k}} | e, \{n_{\vec{k}}\rangle \frac{\sin(\delta\omega_{\vec{k}}(t-t_0)/2)}{\delta\omega_{\vec{k}}/2} e^{i\delta\omega_{\vec{k}}(t+t_0)/2} \right| \tag{48}$$

mit $\delta\omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}} - \omega_0$. Wenn wir das ganze quadrieren und den Limes $t \to \infty$ bilden stellen wir nun fest,

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{\sin(\delta\omega_{\vec{k}}(t-t_0)/2)}{\delta\omega_{\vec{k}}/2} \right)^2 = 2\pi t \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta(\delta\omega_{\vec{k}}) \tag{49}$$

Damit ergeben sich die Raten

$$\Gamma_{\substack{e\to g \\ n\to n'}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}} | \langle g, \{n'_{\vec{k}}\} | \hbar g_{\vec{k}} \sigma_- a^\dagger_{\vec{k}} | e, \{n_{\vec{k}}\} \rangle |^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\vec{k}}) \tag{50}$$

$$\Gamma_{\substack{g\to e \\ n\to n'}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}} | \langle e, \{n'_{\vec{k}}\} | \hbar g_{\vec{k}} \sigma_+ a_{\vec{k}} | g, \{n_{\vec{k}}\} \rangle |^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\vec{k}}) \tag{51}$$

Die Matrixelemente lassen sich nun explizit berechnen

$$| \langle g, n'_{\vec{k}} | \sigma_- a^\dagger_{\vec{k}} | e, n_{\vec{k}} \rangle |^2 = (n_{\vec{k}} + 1) \cdot \delta_{n'_{\vec{k}}, n_{\vec{k}}+1} \tag{52}$$

$$| \langle e, n'_{\vec{k}} | \sigma_+ a_{\vec{k}} | g, n_{\vec{k}} \rangle |^2 = n_{\vec{k}} \cdot \delta_{n'_{\vec{k}}, n_{\vec{k}}-1}. \tag{53}$$

Damit wird die Photonen-Emission

$$\Gamma_{e\to g} = \sum_{n'} \Gamma_{\substack{e\to g \\ n\to n'}} = 2\pi \sum_{\vec{k}} g^2_{\vec{k}} \cdot (n_{\vec{k}} + 1) \cdot \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_0), \tag{54}$$

wobei die 1 der spontanen Emission entspricht und $n_{\vec{k}}$ der stimmulierten Emission entspricht. Für die Photonen-Absorption gilt

$$\Gamma_{g\to e} = \sum_{n'} \Gamma_{\substack{g\to e \\ n\to n'}} = 2\pi \sum_{\vec{k}} g^2_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \cdot \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_0), \tag{55}$$

Wie in der Aufgabe besprochen kann nun der Übergang von der Summe zum Integral gemacht werden und die Dispersionsrelation $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}| = \omega_0$ verwendet werden,

$$\Gamma_{e\to g} = \frac{\omega_0^2 V}{4\pi^2 c^3} \int d\Omega_{\vec{k}} g^2_{\vec{k}} \cdot (n_{\vec{k}} + 1) \tag{56}$$

$$\Gamma_{g\to e} = \frac{\omega_0^2 V}{4\pi^2 c^3} \int d\Omega_{\vec{k}} g^2_{\vec{k}} \cdot n_{\vec{k}} \tag{57}$$

wobei noch Winkelintegrale übrigbleiben, die anisotrope Verteilung der Strahlung erlauben. Der Betrag $|\vec{k}|$ ist auf ω_0/c festgelegt.