Übungen zu Physik der Quanteninformation WS 15

Dr. M. Marthaler
C. Karlewski

Lösungsvorschlag zu Blatt 4
Besprechung, 11.12.2015

---

1. 7-Qubit Steane Code (9 Punkte)

(a) (2 Pkt.) Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, lässt sich der Zustand nach einem Controled U Gate schreiben als:

$$|\Psi\rangle_f = \begin{cases} \text{Messung } 0: & 1/2(|\Psi\rangle_I + U|\Psi\rangle_I) \\ \text{Messung } 1: & 1/2(|\Psi\rangle_I - U|\Psi\rangle_I) \end{cases} \tag{1}$$

Daraus folgt für die 3 aufeinanderfolgenden Messung M_4, M_5 und M_6

$$|\Psi\rangle_f = 1/8\left(\mathbb{1} + (-1)^{M_6})K^6\right)\left(\mathbb{1} + (1 + (-1)^{M_5})K^5\right)\left(\mathbb{1} + (1 + (-1)^{M_4})K^4\right)|\Psi\rangle_I \tag{2}$$

(b) (1 Pkt.) Die Messung 001 führt auf den Endzustand

$$|\Psi\rangle_f = 1/8\left(\mathbb{1} + K^6\right)\left(\mathbb{1} + K^5\right)\left(\mathbb{1} - K^4\right)|\Psi\rangle_I \tag{3}$$

Dies kann korrigiert werden durch eine Anwendung von X_4, mit $\{X_4, K^4\} = 0$, $[K^5, X_4] = 0$, $[K^6, X_4] = 0$.

$$X_4|\Psi\rangle_f = 1/8\left(\mathbb{1} + K^6\right)\left(\mathbb{1} + K^5\right)\left(\mathbb{1} + K^4\right)X_4|\Psi\rangle_I \tag{4}$$

Die Messung 011 führt auf den Endzustand

$$|\Psi\rangle_f = 1/8\left(\mathbb{1} + K^6\right)\left(\mathbb{1} - K^5\right)\left(\mathbb{1} - K^4\right)|\Psi\rangle_I \tag{5}$$

Dies kann korrigiert werden durch eine Anwendung von X_5, mit $\{X_5, K^4\} = 0$, $\{K^5, X_5\} = 0$, $[K^6, X_5] = 0$.

$$X_4|\Psi\rangle_f = 1/8\left(\mathbb{1} + K^6\right)\left(\mathbb{1} + K^5\right)\left(\mathbb{1} + K^4\right)X_5|\Psi\rangle_I \tag{6}$$

Die Messung 111 führt auf den Endzustand

$$|\Psi\rangle_f = 1/8\left(\mathbb{1} - K^6\right)\left(\mathbb{1} - K^5\right)\left(\mathbb{1} - K^4\right)|\Psi\rangle_I \tag{7}$$

Dies kann korrigiert werden durch eine Anwendung von X_7, mit $\{X_7, K^4\} = 0$, $\{K^5, X_7\} = 0$, $\{K^6, X_7\} = 0$.

$$X_4|\Psi\rangle_f = 1/8\left(\mathbb{1} + K^6\right)\left(\mathbb{1} + K^5\right)\left(\mathbb{1} + K^4\right)X_7|\Psi\rangle_I \tag{8}$$

(c) (2 Pkt.) Der initial Zustand ist gegeben als $|\Psi\rangle_I = X_3|\Psi\rangle_I^0$, wobei $|\Psi\rangle_I^0$ ein Eigenzustand zu allen K^i mit positivem Eigenwert ist. Die Kommutatoren von X_3 mit den relevanten K^i sind $[X_3, K^4] = 0$, $\{X_3, K^5\} = 0$ und $\{X_3, K^6\} = 0$. Das führt für die einzelnen Messungen zu den Ergebnissen

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\mathbb{1} + K^4\right)X_3|\Psi\rangle_I^0|0\rangle_4 + \tfrac{1}{2}\left(\mathbb{1} - K^4\right)X_3|\Psi\rangle_I^0|1\rangle_4 = X_3|\Psi\rangle_I^0|0\rangle_4 \Rightarrow M_4 = 0 &(9)\\ &\tfrac{1}{2}\left(\mathbb{1} + K^5\right)X_3|\Psi\rangle_I^0|0\rangle_5 + \tfrac{1}{2}\left(\mathbb{1} - K^5\right)X_3|\Psi\rangle_I^0|1\rangle_5 = X_3|\Psi\rangle_I^0|1\rangle_5 \Rightarrow M_5 = 1 &(10)\\ &\tfrac{1}{2}\left(\mathbb{1} + K^6\right)X_3|\Psi\rangle_I^0|0\rangle_6 + \tfrac{1}{2}\left(\mathbb{1} - K^6\right)X_3|\Psi\rangle_I^0|1\rangle_6 = X_3|\Psi\rangle_I^0|1\rangle_6 \Rightarrow M_6 = 1 &(11)\\ & &(12) \end{aligned}$$

Der Zustand $|\Psi\rangle_f$ ist also

$$1/8\left(\mathbb{1} - K^6\right)\left(\mathbb{1} - K^5\right)\left(\mathbb{1} + K^4\right)X_3|\Psi\rangle_I^0. \tag{13}$$

Mit der Eigenschaft $X_3X_3 = \mathbb{1}$ folgt

$$1/8\left(\mathbb{1} + K^6\right)\left(\mathbb{1} + K^5\right)\left(\mathbb{1} + K^4\right)|\Psi\rangle_I^0 = |\Psi\rangle_I^0. \tag{14}$$

(d) (2 Pkt.) Der initial Zustand ist nun $|\Psi\rangle_I = X_2 X_1 |\Psi\rangle_I^0$. Die benötigten Kommutatoren sind $[X_1, K^4] = 0$, $\{X_1, K^5\} = 0$ und $[X_1, K^5] = 0$, sowie $[X_2, K^4] = 0$, $[X_2, K^5] = 0$ und $\{X_2, K^6\} = 0$. Daraus folgen die Messungen $M_4 = 0$, $M_5 = 1$ und $M_6 = 1$. Die daraus resultierende Korrektur ist X_3. Die Kommutatoren mit K^i wurden schon im Aufgabenteil (c) berechnet. Angewendet auf $|\Psi\rangle_f$ ergibt das

$$X_3 |\Psi\rangle_f = X_3\, 1/8 \left(\mathbb{1} - K^6\right)\left(\mathbb{1} - K^5\right)\left(\mathbb{1} + K^4\right) X_2 X_1 |\Psi\rangle_I^0 = X_3 X_2 X_1 |\Psi\rangle_I^0 \tag{15}$$

Eine weitere Messung dieses Zustand ergibt 000, aber $X_3 X_2 X_1 |\Psi\rangle_I^0 = X_3 X_2 X_1 (\alpha |0\rangle_L + \beta |1\rangle_L) = \alpha |1\rangle_L + \beta |0\rangle_L$.

(e) (2 Pkt.) Die benötigten Kommutatoren sind $\{Z_5, K^1\} = 0$, $\{Z_5, K^2\} = 0$, $[Z_5, K^3] = 0$, $\{X_5, K^4\} = 0$, $\{X_5, K^5\} = 0$, $[X_5, K^6] = 0$. Daraus folgt $M_1 = 1$, $M_2 = 1$, $M_3 = 0$, $M_4 = 1$, $M_5 = 1$ und $M_6 = 0$. Die beiden Korrekturen sind Z_5 und X_5. Der Endzustand ist daher

$$|\Psi\rangle_L = X_5\, 1/8 \left(\mathbb{1} + K^6\right)\left(\mathbb{1} - K^5\right)\left(\mathbb{1} - K^4\right) Z_5\, 1/8 \left(\mathbb{1} + K^3\right)\left(\mathbb{1} - K^2\right)\left(\mathbb{1} - K^1\right) Z_5 X_5 |\Psi\rangle_I^0 \tag{16}$$

$$= 1/64 \left(\mathbb{1} + K^6\right)\left(\mathbb{1} + K^5\right)\left(\mathbb{1} + K^4\right)\left(\mathbb{1} + K^3\right)\left(\mathbb{1} + K^2\right)\left(\mathbb{1} + K^1\right) X_5 Z_5 Z_5 X_5 |\Psi\rangle_I^0 \tag{17}$$

$$= |\Psi\rangle_I^0 \tag{18}$$

Dies entspricht dem gewünschten ursprünglichen Zustand. Ein Fehler $Z_5 X_5$ enspricht dem Fehler Y_5 und kann damit auch korrigiert werden.

2. Der Flux-Qubit **6 Punkte**

(a) (1 Pkt.) Aus der Addition der Phasen ergibt sich $\phi_L = -\phi_J - \phi_E$ und integrieren der Spannungsbedingung ergibt die Phase $\phi_J = \frac{2e}{\hbar} \int U dt$. Mithilfe der Kirchhoff'schen Regeln ergibt sich für die Addition der Ströme. **ACHTUNG: Fehler auf Aufgabenblatt: $I_L = \frac{\hbar \phi_L}{2eL}$, z.B. durch ein Dimensionsvergleich und $E_L = \frac{\hbar^2}{(2e)^2 L}$.**

$$0 = I_J + I_K - I_L \tag{19}$$

$$0 = I_C \sin(\phi_J) + C\dot{U} - \tfrac{\hbar \phi_L}{2eL} \tag{20}$$

$$0 = \frac{\hbar C}{2e} \ddot{\phi}_J + I_C \sin(\phi_J) + \tfrac{\hbar}{2eL}(\phi_J + \phi_E) \tag{21}$$

$$0 = \frac{\hbar^2}{2E_C} \ddot{\phi}_J + E_J \sin(\phi_J) + E_L(\phi_J + \phi_E) \tag{22}$$

(b) (2 Pkt.) Im Vergleich mit der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \tag{23}$$

ergibt sich für Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\dot{\phi}_J, \phi_J) = \frac{\hbar^2}{4E_C} \dot{\phi}_J^{\,2} + E_J \cos(\phi_J) - \frac{E_L}{2} (\phi_J + \phi_E)^2 \tag{24}$$

(c) (1 Pkt.) Der Hamiltonfunktion ergibt sich aus der Beziehung

$$H = \dot{\phi}_J \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_J} - \mathcal{L} \tag{25}$$

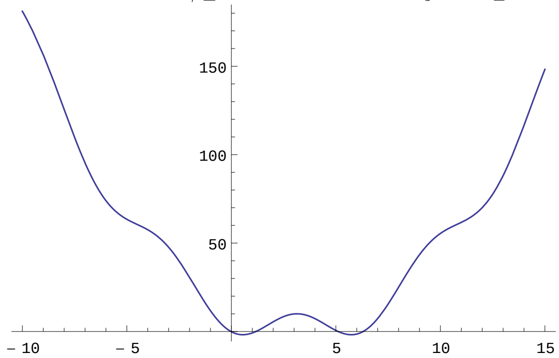
$$= \frac{\hbar^2}{2E_C} \dot{\phi}_J^{\,2} - \frac{\hbar^2}{4E_C} \dot{\phi}_J^{\,2} - E_J \cos(\phi_J) + \frac{E_L}{2} (\phi_J + \phi_E)^2 \tag{26}$$

$$= \frac{\hbar^2}{4E_C} \dot{\phi}_J^{\,2} - E_J \cos(\phi_J) + \frac{E_L}{2} (\phi_J + \phi_E)^2 \tag{27}$$

(d) (2 Pkt.) Der kinetische Term ist der quadratische Term der Ableitung von ϕ_J, daher sind die restlichen Terme dem Potential zu zuordnen.

$$V = -E_J \cos(\phi_J) + \frac{E_L}{2}(\phi_J + \phi_E)^2 \tag{28}$$

Um den Punkt $\phi_E = -\pi$ und mit $E_J > E_L$ bildet sich ein Doppelmuldenpotential.



3. Getriebenes 3-Zustandssystem **5 Punkte**

(a) (1 Pkt.) Die Hamiltonian in Matrixform ist

$$H = \begin{pmatrix} 0 & g\cos(\omega_D t) & 0 \\ g\cos(\omega_D t) & \omega & \sqrt{2}g\cos(\omega_D t) \\ 0 & \sqrt{2}g\cos(\omega_D t) & 2(\omega+\lambda) \end{pmatrix} \tag{29}$$

(b) (2 Pkt.) Wir nutzen die Eigenschaften der unitären Transformation $U^\dagger a^\dagger U = a^\dagger e^{i\omega_D t}$, $U^\dagger a U = a^\dagger e^{-i\omega_D t}$ um den Hamiltonian im rotierenden Bezugssystem zu berechnen (mit RWA):

$$H_R = [U^\dagger H U - iU^\dagger \dot{U}] \tag{30}$$

$$-iU^\dagger \dot{U} = -\omega_D a^\dagger a \tag{31}$$

$$U^\dagger H U = \omega a^\dagger a + \lambda (a^\dagger)^2 (a)^2 + g(a e^{-i\omega_D t} + a^\dagger e^{i\omega_D t})\cos(\omega_D t) \tag{32}$$

$$= \omega a^\dagger a + \lambda (a^\dagger)^2 (a)^2 + \tfrac{g}{2}(a + a^\dagger) \tag{33}$$

$$\Rightarrow H_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\omega_D - \omega) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\omega - \omega_D + \lambda) \end{pmatrix} + \tfrac{g}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

(c) (2 Pkt.) Für $\omega_D = \omega$ gilt $H_R = \lambda (a^\dagger)^2 a^2 + \frac{g}{2}(a + a^\dagger)$. Die neuen Basis Vektoren sind

$$|+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; |-\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Eine Basistransformation führt zu neuen Matrix $H_R^\pm$

$$H_R^\pm = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{g}{2} & 0 \\ \frac{g}{2} & 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} & 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{g}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{g}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{g}{2} \\ \frac{g}{2} & -\frac{g}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{H_C} \tag{37}$$

In erster Ordnung Störungstheorie ist die Korrektur zu $|2\rangle$

$$|2\rangle^{(1)} = |+\rangle \frac{\langle +|H_C|2\rangle}{2\lambda - \frac{g}{2}} + |-\rangle \frac{\langle -|H_C|2\rangle}{2\lambda + \frac{g}{2}} \tag{38}$$

$$= |+\rangle \frac{g}{4\lambda - g} - |-\rangle \frac{g}{4\lambda + g} \tag{39}$$

D.h. der Überlapp ist besonders klein wenn $\lambda \gg g$.