Übungen zu Physik der Quanteninformation SS 14

Dr. M. Marthaler
C. Karlewski

Blatt 3
Besprechung, 27.11.2015

---

1. Erzeugung eines Zustandes **12 Punkte**

Wie in der Vorlesung besprochen, wollen wir einen Zustand $|\Psi_m\rangle = \sum_{i=0}^{2^m-1} \sqrt{p_i^{(m)}}\,|i\rangle$ initialisieren, wobei m die Anzahl der von uns verwendeten Qubits ist und die p_i^m gegeben sind durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$. Dies beruht auf dem Paper von Lov Grover und Terry Rudolph von 2002 (arXiv:quant-ph/0208112v1). Wir nehmen an das $p(x)$ auf den Bereich 0 bis x_T beschränkt ist. Die p_i^m sind Abhängig von der Anzahl der Unterteilungen des Bereichs 0 bis x_T, welche wiederum durch die Anzahl der verwendeten Qubits gegeben ist. Der Index i gibt an in welchem Teil der Unterteilung man sich befindet. Um einen endgültigen gewünschten Superpositionszustand aus N Qubits zu erreichen wird nun iterativ der gewünschte Endzustand aufgebaut, $m = 1, 2, \ldots, N$. Dabei wird dir Größe $f^{(m)}(i)$ nützlich sein, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, sich in der linken Hälfte des Teilstück i zu befinden, wobei x_L^i die linke und x_R^i die rechte Regionsgrenze bilden

$$f^{(m)}(i) = \frac{\int_{x_L^i}^{(x_L^i+x_R^i)/2} p(x)dx}{\int_{x_L^i}^{x_R^i} p(x)dx} \tag{1}$$

Für den ersten Schritt (1 Qubit, $x_L^0 = 0$, $x_R^0 = x_T$) ergibt dies

$$f^{(1)}(0) = \frac{\int_0^{x_T/2} p(x)dx}{\underbrace{\int_0^{x_T} p(x)dx}_{=1}} = \int_0^{x_T/2} p(x)dx \tag{2}$$

Die gewünschte Superposition mit den richtigen Amplituden wird durch eine Rotation erreicht

$$\Theta_0 = \arccos(\sqrt{f^{(1)}(0)}) \tag{3}$$

$$|\Psi_1\rangle = \cos(\Theta_0)\,|0\rangle + \sin(\Theta_0)\,|1\rangle \tag{4}$$

$$\Rightarrow p_0^1 = f^{(1)}(0); \quad p_1^1 = 1 - f^{(1)}(0) \tag{5}$$

$$|\Psi_1\rangle = \sqrt{f^{(1)}(0)}\,|0\rangle + \sqrt{1 - f^{(1)}(0)}\,|1\rangle \tag{6}$$

(a) (3 Pkt.) Berechnen sie die Wahrscheinlichkeiten p_0^2, p_1^2, p_2^2, p_2^3 für 2 Qubits ausgehend von der Lösung für einen Qubit. Dabei ist nun die Rotation gegeben durch $\Theta_i^m = \arccos(\sqrt{f^{(m)}(i)})$.

(b) (2 Pkt.) Es gilt

$$p_i^{m-1} = \int_{x_L^i}^{x_R^i} p(x)dx. \tag{7}$$

Berechnen sie p_j^m für die beiden Unterteilungen von dem Bereich i und zeigen sie, dass dann auch $p_j^m = \int_{x_L^j}^{x_R^j} p(x)dx$ (Induktionsschritt).

(c) (3 Pkt.) Wir definieren die Wahrscheinlichkeitsdichte als

$$p(x) = 2x\Theta(x)\Theta(1-x), \qquad x_T = 1. \tag{8}$$

Berechnen sie $|\Psi_3\rangle$.

2. Suzuki-Trotter Formel **(8 Punkte)**

Es soll gelten $[X, [X, Y]] = 0$ und $[Y, [X, Y]] = 0$. Zeigen sie, dass

$$e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y]. \tag{9}$$

Zeigen sie damit, dass gilt

$$e^{X+Y} = e^X e^Y e^{-\frac{1}{2}[X,Y]}, \tag{10}$$

und

$$e^{\delta(X+Y)} = e^{\delta X} e^{\delta Y} \cdot \left[1 + \mathcal{O}(\delta^2)\right]. \tag{11}$$

Für Interessierte: Der allgemeine Fall kann in dem original Paper von Suzuki (1976) nach gelesen werden.

`https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.cmp/1103900351`