Übungen zu Physik der Quanteninformation SS 14

Dr. M. Marthaler
C. Karlewski

Lösungsvorschlag zu Blatt 2
Besprechung, 13.11.2015

1. Die Quanten Fourier Transformation

(a) Um zu zeigen, dass $\hat{F}$ unitär ist, berechnen wir $\hat{F}^\dagger \hat{F}$

$$\hat{F}^\dagger = \sum_{jk} \frac{e^{-2\pi ijk/N}}{\sqrt{N}} |j\rangle \langle k| \tag{1}$$

$$\hat{F} = \sum_{j'k'} \frac{e^{2\pi ij'k'/N}}{\sqrt{N}} |j'\rangle \langle k'| \tag{2}$$

$$\hat{F}^\dagger \hat{F} = \frac{1}{N} \sum_{jkj'k'} e^{2\pi i(j'k'-jk)/N} |j\rangle \langle j'| \delta_{kk'} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{jkj'} e^{2\pi i(j'-j)k/N} |j\rangle \langle j'| \tag{4}$$

$$= \sum_{jj'} |j\rangle \langle j'| \delta_{jj'} = \mathbb{1} \tag{5}$$

(b)

$$F_j |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} jk} |k\rangle \tag{6}$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} e^{\frac{2\pi i}{2^n} jk} |k\rangle \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Zur Erinnerung wie die k Werte definiert waren

$$|k\rangle = |k_1\rangle |k_2\rangle \cdots = |k_1 k_2 \cdots k_n\rangle \tag{9}$$

$$k = k_1 2^{n-1} + \cdots + k_n 2^0. \tag{10}$$

Daraus folgt

$$F_j |j\rangle = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} e^{\frac{2\pi i}{2^n} j \sum_{l=1}^{n} k_l 2^{n-l}} |k_1 \cdots k_n\rangle \tag{11}$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0} \bigotimes_{l=1}^{n} e^{2\pi ijk_l 2^{-l}} |k_l\rangle \tag{12}$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \sum_{k_l=0}^{1} e^{2\pi ijk_l 2^{-l}} |k_l\rangle \tag{13}$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[|0\rangle_l + e^{2\pi ij2^{-l}} |1\rangle_l \right] \tag{14}$$

(c) Zu zeigen ist

$$e^{\frac{2\pi i}{2^l} j} = \exp\left[2\pi i \sum_{k=1}^{l} j_{n-l+k} 2^{-k} \right] \tag{15}$$

Wir betrachten nun den relevanten Teil des Exponenten

$$
\begin{aligned}
j2^{-l} &= \left[j_1 2^{n-1} + \cdots + j_{n-1}2^1 + j_n 2^0\right] 2^{-l} && (16)\\
&= j_1 2^{n-1-l} + \cdots j_{n-l+1}2^{-1} + j_{n-l+2}2^{-2} + \cdots + j_n 2^{-l} && (17)\\
&= \underbrace{\cdots}_{\text{ganze Zahl}} + \sum_{k=1}^{l} j_{n-l+k}2^{-k} \quad \text{q.e.d.} && (18)
\end{aligned}
$$

So lange $n-k$ größer ist als l bleibt der Exponent der 2 positiv und der gesamt Term bildet eine ganze Zahl die zusammen mit $\exp[2\pi i]$ eine 1 ergibt.

(d) Wie auf dem Aufgabenblatt beschrieben wirkt das Hadamar wie

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}\left|0\right\rangle_k &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_k + \left|1\right\rangle_k\right) && (19)\\
\mathbf{H}\left|1\right\rangle_k &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_k - \left|1\right\rangle_k\right). && (20)
\end{aligned}
$$

Daher folgt direkt für einen allgemeinen Zustand $\left|j_k\right\rangle$

$$
\mathbf{H}\left|j_k\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_k + e^{\pi i j_k}\left|1\right\rangle_k\right). \tag{21}
$$

(e) Das Hadamar Gate auf den ersten Qubit des Zustands $\left|j\right\rangle = \left|j_1 j_2 \cdots j_n\right\rangle$ angewandt ergibt

$$
\left(\mathbf{H}\left|j_1\right\rangle\right)\left|j_2 \cdots j_n\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1 + e^{2\pi i j_1 2^{-1}}\left|1\right\rangle_1\right)\left|j_2 j_3 \cdots j_n\right\rangle \tag{22}
$$

Anschließend wenden wir nun das Controlled Phase Gate nacheinander auf alle folgenden Qubits an

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R_2}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1 + e^{2\pi i j_1 2^{-1}}\left|1\right\rangle_1\right)\left|j_2\right\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1 + e^{2\pi i j_1 2^{-1} + j_2 2^{-2}}\left|1\right\rangle_1\right)\left|j_2\right\rangle && (23)\\
\mathbf{R_3}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1 + e^{2\pi i j_1 2^{-1} + j_2 2^{-2}}\left|1\right\rangle_1\right)\left|j_3\right\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1 + e^{2\pi i j_1 2^{-1} + j_2 2^{-2} + j_3 2^{-3}}\left|1\right\rangle_1\right)\left|j_3\right\rangle && (24)
\end{aligned}
$$

$$
\vdots
$$

$$
\prod_{k=2}^{n}\mathbf{R}_k\left(\mathbf{H}\left|j_1\right\rangle\right)\left|j_2 \cdots j_n\right\rangle\left|j_1 j_2 \ldots j_n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^{n} j_m 2^{-m}}\left|1\right\rangle_1\right)\left|j_2 j_3 \ldots j_n\right\rangle \tag{25}
$$

(f) Aufgabenteil (e) ergibt den ersten Teil des Schaltkreises

$$
\left|j\right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^{n} j_m 2^{-m}}\left|1\right\rangle_1\right)\left|j_2 j_3 \ldots j_n\right\rangle \tag{26}
$$

Auf den letzten Ket wird nun immer wieder Aufgabenteil (e) angewandt, wobei sich die Indizes verschieben

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^{n} j_m 2^{-m}}\left|1\right\rangle_1\right)\left|j_2 j_3 \ldots j_n\right\rangle && (27)\\
&\to \tfrac{1}{2}\left(\left|0\right\rangle_1 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^{n} j_m 2^{-m}}\left|1\right\rangle_1\right)\cdot\left(\left|0\right\rangle_2 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^{n-1} j_{m+1} 2^{-m}}\left|1\right\rangle_2\right)\left|j_3 j_4 \ldots j_n\right\rangle && (28)\\
&\to 2^{-\frac{n}{2}}\left(\left|0\right\rangle_1 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^{n} j_m 2^{-m}}\left|1\right\rangle_1\right)\cdots\left(\left|0\right\rangle_n + e^{2\pi i j_n 2^{-1}}\left|1\right\rangle_n\right) && (29)
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe von Aufgabenteil (c) lassen sich nun die Exponenten weiter vereinfachen

$$
\to 2^{-\frac{n}{2}}\left(\left|0\right\rangle_n + \underbrace{e^{2\pi i j 2^{-n}}}_{\text{Gleichung 8 (AB) für l=n}}\left|1\right\rangle_n\right)\cdot\left(\left|0\right\rangle_{n-1} + \underbrace{e^{2\pi i j 2^{-(n-1)}}}_{\text{Gleichung 8 (AB) für l=n-1}}\left|1\right\rangle_{n-1}\right)\cdots \tag{30}
$$

Zusammenfassend für alle Terme ergibt sich damit

$$\rightarrow 2^{-\frac{n}{2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left(|0\rangle_l + e^{2\pi i j 2^l} |1\rangle_l \right) \tag{31}$$

(g) Der Operator $\hat{F}_j$ war in seiner ursprünglichen Form gegeben als

$$\hat{F}_j |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left[\frac{2\pi i}{N} jk\right] |k\rangle \,. \tag{32}$$

Anwenden des Operators $\hat{F}$ auf den Zustand $|\Psi\rangle$ entspricht dem anwenden von $\hat{F}_j$ auf die Basiszustände $|j\rangle$

$$\hat{F}\,|\Psi\rangle = \sum_j x_j \hat{F}_j\,|j\rangle \tag{33}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j x_j \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} jk}\,|k\rangle \tag{34}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_j e^{\frac{2\pi i}{N} jk} x_j\,|k\rangle \tag{35}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y_k\,|k\rangle \tag{36}$$