Karlsruher Institut für Technologie SS 2016
Institut für theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler **17.06.16**
Besprechungsdatum: **01.07.16**

Übungsblatt Nr. 5 zur Vorlesung „Physik der Quanteninformation“

1 1/f-Rauschen (7 Punkte)

Die Funktion $X(t)$ sei eine klassische stochastische Variable. Sie ist charakterisiert durch die Korrelationsfunktion und das Rauschspektrum

$$\langle X(t)X(0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} S(\omega)\,, \tag{1}$$

wobei $\langle \ldots \rangle$ das Ensemble-Mittel der Funktion ist. Hier haben wir Translationsinvarianz in der Zeit angenommen.

Häufig findet man 1/f Rauschen. D.h. die Spektralfunktion ist gegeben durch

$$S(\omega) = \frac{E_{1/f}^2 \Theta\left(\omega - \omega_{\mathrm{min}}\right)}{\omega}\,. \tag{2}$$

Wir betrachten nun ein 2-Niveau-System desen Zeitentwicklung durch den folgenden Hamilton-Operator beschrieben wird,

$$H = \frac{\hbar}{2}\left(\omega_{ab} + X(t)\right)\,. \tag{3}$$

Für die Dichtematrix dieses Systems gilt (wie in der Vorlesung gezeigt)

$$\rho_{ab}(t) = e^{-i\omega_{ab}t} \rho_{ab}(0) e^{i\int_0^t X(t')dt'}\,. \tag{4}$$

Berechnen Sie $\langle \rho_{ab}(t)\rangle$, wobei $X(t)$ Gauss-verteilt ist. Benutzen sie dazu die in der Vorlesung diskutierten Relation zur Berechnenung von $\langle e^{i\int_0^t X(t')dt'}\rangle$ und verwenden sie die Näherung

$$\int_{\omega_{\mathrm{min}}}^{\infty} d\omega \frac{\sin^2(\omega t)}{\omega^3} \approx -\frac{1}{2} t^2 \left(-3 + 2\gamma + 2\log(2\omega_{\mathrm{min}} t]\right)\,, \tag{5}$$

Bitte wenden . . .

$\boxed{2}$ Die quasistatische Näherung **(6 Punkte)**

Ein 2-Niveau-System wird beschrieben durch den Hamilton-Operator,

$$H = \frac{1}{2}(\omega_{ab} + X)\sigma_z \, . \tag{6}$$

X ist dabei eine Gauss-verteilte Größe mit der Verteilungsfunktion $P(X) = \exp\left[-(X/W)^2\right]$. Die Zeitentwicklung eines Matrix-Elements der Dichtematrix ist (wie in der Vorlesung gezeigt) gegeben durch

$$\rho_{ab}(t) = e^{-i(\omega_{ab}+X)t}\rho_{ab}(0) \, . \tag{7}$$

Nehmen sie an das sie ein Ensamble aus 2-Niveau-Systemen betrachten und berechnen Sie das Ensamblemittel der Zeitentwicklung der Dichtematrix,

$$\bar{\rho}_{ab}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dX P(X) \rho_{ab}(t) \, . \tag{8}$$

$\boxed{3}$ Dekohärenz und die Lindblad-Gleichung **(7 Punkte)**

Nehmen Sie an, dass die Bewegungsgleichung einer Dichtematrix eines 2-Niveau-Systems gegeben ist durch die sogenannte Lindblad-Gleichung,

$$\dot{\rho} = -i\frac{1}{2}\omega_{ab}[\sigma_z, \rho] + \frac{\gamma_{ab}}{2}\left(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-\right) + \frac{\gamma_{ba}}{2}\left(2\sigma_+\rho\sigma_- - \sigma_-\sigma_+\rho - \rho\sigma_-\sigma_+\right) \, . \tag{9}$$

Dabei gilt,

$$\sigma_+|a\rangle = 0 \, , \;\; \sigma_-|a\rangle = |b\rangle \, , \;\; \sigma_-|b\rangle = 0 \, , \;\; \sigma_+|b\rangle = |a\rangle \, . \tag{10}$$

Finden sie die Bewegungsgleichung für das Matrixelement $\rho_{ab}(t)$.