

Übungsblatt Nr. 1 zur Vorlesung “Physik der Quanteninformation“

1 Eigenzustände des Oszillators unter Einwirkung einer Kraft 4 Punkte

Gegeben sind die Fock-Zustände $|n\rangle$ für die gilt, $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$, wobei a^\dagger und a die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators sind.

- a) (2 Punkte) Zeigen sie das für den Verschiebungsoperator $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$ gilt:

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha. \quad (1)$$

- b) (2 Punkte) Finden sie die Eigenzustände und Eigenenergien des Hamiltonians

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + f(a^\dagger + a), \quad (2)$$

als Funktion der Fock-Zustände $|n\rangle$.

2 Eigenzustände des Oszillators unter Deformation des Potentials 6 Punkte

Gegeben sind die Fock-Zustände $|n\rangle$ für die gilt, $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$, wobei a^\dagger und a die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators sind.

- a) (3 Punkte) Der sogenannte Squeezing-operator ist definiert durch $S(\xi) = \exp\left[\frac{(\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2})}{2}\right]$, mit $\xi = r e^{i\Theta}$. Zeigen sie das gilt:

$$S^\dagger(\xi) a S(\xi) = a \cosh r - a^\dagger e^{i\Theta} \sinh r. \quad (3)$$

- b) (3 Punkte) Finden sie die Eigenzustände und Eigenenergien des Hamiltonians

$$H = \hbar\delta\omega a^\dagger a + d(a^{\dagger 2} + a^2), \quad (4)$$

als Funktion der Fock-Zustände $|n\rangle$.

Bitte wenden ...

3 Zeitliche Entwicklung des kohärenten Zustands**5 Punkte**

Der Hamiltonian eines harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$H = \hbar\omega a^\dagger a. \quad (5)$$

Zeigen sie dass für die zeitliche Entwicklung des kohärenten Zustands

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (6)$$

durch den gegebenen Hamiltonian, in der Ortsdarstellung $\psi(q) = \langle q|\alpha\rangle$, gilt:

$$|\psi(q, t)| \propto e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(q - q_0 \cos(\omega t))^2}. \quad (7)$$

Geben sie q_0 in expliziter Form an.

4 Baker-Hausdorff**5 Punkte**

Zeigen sie dass gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2} \quad \text{mit} \quad [[A, B], A] = 0 = [[A, B], B]. \quad (8)$$

Ein möglicher Weg besteht in der Definition eines Operators $G(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B}$. Mit der Ableitung von $G(\lambda)$ nach λ lässt sich eine homogene Differentialgleichung für $G(\lambda)$ bilden. Durch diese lässt sich obige Relation beweisen.